

périodique mensuel de la société mathématique de france

B.P. N° 126-05 - 75226 PARIS CEDEX 05

Directeur de la Publication : J. P. KAHANE

comité de rédaction

Robert AZENCOTT, Alain CHENCINER, Alain CONNES, David EISENBUD, Michael GROMOV, Christian HOUZEL, Jean-Louis KRIVINE, Johannes SJÖSTRAND, Bernard TEISSIER (secrétaire), Michael WALDSCHMIDT

distribution

1 - membres de la s.m.f.

Société Mathématique de France B.P. 126-05 - 75226 PARIS CEDEX 05

2 - france et étranger (excepté les états-unis, le canada et le mexique)

> OFFILIB 48 rue Gay-Lussac - 75240 PARIS CEDEX 05

3 - états-unis, canada, mexique

American Mathematical Society P.O. Box 6248 - Providence, Rhode Island 02940

Abonnement 1984 : 600 FF (T.T.C.) - \$ 95 Prix du volume : 85 FF (T.T.C.) - \$ 12

© Société Mathématique de France, 1982 Tous droits réservés ISSN 0303-1179 A 875

analyse et topologie sur les espaces singuliers

(I) CIRM, 6 - 10 juillet 1981

Avec la collaboration de : A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN
W. BORHO, J-P. BRASSELET, J-L. BRYLINSKI, J. CHEEGER
P. DELIGNE, M. GORESKY, G. LAUMON, G. LUSZTIG
R. MACPHERSON, B. MALGRANGE, F. PHAM, C. SABBAH
M. SAITO, J-L. VERDIER, S. ZUCKER

société mathématique de france

Ces trois volumes (n°100,101,102) réunissent les actes du colloque de Luminy (du 6 au 11 juillet 1981) intitulé Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Plusieurs thèmes ont été abordés lors de ce colloque et nous allons les décrire brièvement :

On sait que les complexes de faisceaux de solutions des complexes différentiels linéaires holonomes et réguliers ont une cohomologie analytiquement constructible. Cette correspondance dite de Riemann-Hilbert établit une équivalence entre complexes constructibles et complexes holonomes réguliers. Dans cette correspondance, à un module holonome régulier est associé un complexe constructible qui a en général plusieurs faisceaux de cohomologie non nuls. Ces complexes constructibles particuliers sont appelés des faisceaux pervers et peuvent être caractérisés en termes purement topologiques. Cette caractérisation à son tour, a un sens pour les complexes constructibles de faisceaux étales sur une variété non nécessairement lisse définie sur un corps quelconque, fini par exemple. On a donc une notion de faisceaux pervers étales et on démontre que cette catégorie de complexes bien qu'elle ne corresponde plus à des modules différentiels est en fait une nouvelle catégorie abélienne. Un des intérêts de ces faisceaux pervers étales est que les théorèmes généraux de passage de la caractéristique o à la caractéristique p par spécialisation, permettent d'obtenir des résultats sur les faisceaux pervers sur le corps des complexes, lorsqu'on sait démontrer ces résultats sur les corps finis. Le complexe d'intersection dont l'hypercohomologie est l'homologie d'intersection est un faisceau pervers qui se spécialise sur les corps finis en le complexe d'intersection étale. Or. on a sur les corps finis une notion de pureté des complexes de faisceaux étales en considérant l'action du Froberius sur les tiges de la cohomologie. Le résultat fondamental de Gabber est que le complexe d'intersection est pur. Il permet en utilisant les théorèmes de Deligne sur le comportement de la pureté par image directe (conjecture de Weil) d'obtenir un théorème de décomposition de l'image directe d'un complexe d'intersection en somme directe de complexes d'intersections à coefficients locaux. Ce thème de perversité, complexe d'intersection, pureté est exposé dans le gros article [1] . C'est le thème principal de ce colloque.

Un thème dérivé est celui des différentes applications de l'homologie d'intersection à l'étude des orbites nilpotentes [3] , à la théorie de Morse pour les espaces singuliers [6] , et à la cohomologie \mbox{L}^2 des quotients par les groupes arithmétiques [15] .

Il semble que l'homologie d'intersection porte dans tous les cas une struc-

ture de Hodge, fait qui serait le pendant du théorème de pureté de Gabber. On ne sait pas le démontrer en général, mais dans [4] on propose une filtration qui devrait être celle de Hodge et dans [5] et [15] on montre que l'interprétation en terme de cohomologie L^2 permet dans certains cas d'obtenir une structure de Hodge.

Ces structures de Hodge sur l'homologie d'intersection devraient pouvoir se décrire directement sur le module holonome qui lui correspond. C'est ce qu'on tente de faire dans [4]. C'est ce qu'on fait dans [1] et [13] pour le module holonome correspondant aux cycles évanescents.

A ce module correspondant aux cycles évanescents est associé un polynôme dit polynôme de *Bernstein*, ou b-fonction dans le cas d'un point singulier isolé. Dans [9] on relie ce polynôme à l'action de la monodromie şur les espaces de cycles évanescents. Enfin les autres conférences se regroupent autour des thèmes : caractéristiques d'Euler Poincaré localesou globales[10], [7],[2], et cycles évanescents [12] et [14].

Les Organisateurs,

B.TEISSIER

Ecole Polytechnique Département de Mathématiques 91128 Palaiseau Cedex J.L.VERDIER

Ecole Normale Supérieure Département de Mathématiques 45 rue d'Ulm 75005 Paris

VOLUME 1 - ASTÉRISQUE N° 100 (1982)

[1] A.A.BEILINSON, J.BERNSTEIN, P.DELIGNE - Faisceaux pervers

Introduction

Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée.

- 1.1. Catégories triangulées.
- 1.2. Sous-catégories abéliennes.
- 1.3. t-catégories.
- 1.4. Recollement.

Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas.

- 2.1. Espaces stratifiés.
- 2.2. Schémas.

Compléments.

- 3.1. Catégories dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes.
- 3.2. Localisation.
- 3.3. Cohomologie entière.

La perversité autoduale : propriétés géométriques.

- 4.1. Morphismes affines.
- 4.2. Exactitudes et adjonctions.
- 4.3. Objets simples.
- 4.4. Cycles évanescents (estimations supérieures).
- 4.5. Estimations de nombres de Betti.

La perversité autoduale : poids.

- 5.1. Rappels de [1]
- 5.2. Une réciproque.
- 5.3. La filtration par le poids.
- 5.4. Complexes purs.

De F à C

- 6.1. Principes.
- 6.2. Exemples.

Index terminologique.

Bibliographie.

VOLUME 2-3 - ASTÉRISQUE N° 101-102 (1983)

| [2] | J.P BRASSELET, | $\it Existence$ | des | classes | de | Chern | en | théorie |
|-----|----------------|-----------------|-----|---------|----|-------|----|---------|
| | bivariante. | | | | | | | |

- [3] W. BORHO et R. MAC PHERSON, Partial resolutions of nilpotent varieties.
- [4] J.P BRYLINSKI, Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II.
- [5] J. CHEEGER, Hodge Theory of complex cones.
- [6] M. GORESKI et R. MAC PHERSON, Morse theory and Intersection Homology theory.
- [7] G. LAUMON, Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface.
- [8] G. LUSZTIG, Singularities, character formulas, weight multiplicities.
- [9] B. MALGRANGE, Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara.
- [10] B. MALGRANGE, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie éva-
- [11] F. PHAM, Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé.
- [12] C. SABBAH, Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents.
- [13] M. SAITO, Supplement to "Gauss-Manin system and mixed Hodge structure".
- [14] J.L VERDIER, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée.
- [15] S. ZUCKER, Hodge theory and arithmetic groups.

Faisceaux pervers

par A.A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne

| | 0. | Introduction | . p. 7 | | | | | |
|----|------|---|--------|--|--|--|--|--|
| | 1. | Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée | p.18 | | | | | |
| | | 1.1. Catégories triangulées. 1.2. Sous-catégories abéliennes. 1.3. t-catégories. 1.4. Recollement. | | | | | | |
| 2. | | Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas.p.56 | | | | | | |
| | | 2.1. Espaces stratifiés.2.2. Schémas. | | | | | | |
| | 3. | Compléments | p.76 | | | | | |
| | | 3.1. Catégorie dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes.3.2. Localisation.3.3. Cohomologie entière. | - | | | | | |
| | 4. | La perversité autoduale : propriétés géométriques | p.101 | | | | | |
| | | 4.1. Morphismes affines. 4.2. Exactitudes et adjonctions. 4.3. Objets simples. 4.4. Cycles évanescents (estimations supérieures). 4.5. Estimations de nombres de Betti. | | | | | | |
| | 5. | La perversité autoduale : poids | p.122 | | | | | |
| | | 5.1. Rappels de [1].5.2. Une réciproque.5.3. La filtration par le poids.5.4. Complexes purs. | | | | | | |
| | 6. | De F à C | p.148 | | | | | |
| | | 6.1. Principes.6.2. Exemples. | | | | | | |
| | Bib | liographie | p.167 | | | | | |
| | | | p.169 | | | | | |
| | Inde | ex des notations | n 171 | | | | | |

THÈMES

- a) Perversité, complexe d'intersection, pureté : [1]
- b) Intersection Applications : [1] [3] [6] [8] [15]
- c) Intersection et Structure de Hodge :[4] [5] [15]
- d) Structure de Hodge sur $R\Psi$: [11] [13]
- e) RY et χ : [9] [14] [2] [7] [12] [10]

O. INTRODUCTION.

Il avait été d'abord prévu que O. Gabber soit coauteur du présent article. Il a préféré s'en abstenir, pour ne pas être coresponsable des erreurs ou imprécisions qui s'y trouvent. Il n'en est pas moins responsable de bien des idées que nous exploitons et le lecteur lui est redevable de nombreuses critiques qui, nous l'espérons, ont permis d'améliorer le manuscrit.

Dans [4], [5], [6], M. Goresky et R. MacPherson ont défini et étudié la cohomologie d'intersection d'espaces convenables X . Dans [4], [5], X est une pseudo-variété PL orientée, i.e. pour X de dimension n , un espace PL admettant un sous-espace PL fermé rare E de dimension < n-2 dont le complément est une variété PL orientée purement de dimension n . L'espace X est muni d'une stratification S , i.e. d'une filtration par des sous-espaces PL fermés X_{L} (0 \leq k \leq n), avec $X_i \supset X_{i-1}$, $X_i - X_{i-1}$ une variété purement de dimension i , et (X,S) équisingulier le long de $X_i - X_{i-1}$. On suppose que $X_{n-1} = X_{n-2}$. Pour chaque perversité p (une suite p_2, \dots, p_n d'entiers, telle que $p_2 = 0$ et que $p_{k+1} = p_k$ ou p_k+1 , ils définissent le ième groupe IH $_{i}^{p}(X)$ d'homologie d'intersection de perversité p de X comme le groupe des cycles singuliers PL de dimension i de X qui intersectent X_{n-k} selon une partie de dimension $i-(k-p_k)$ au plus, modulo une relation d'homologie convenable. Ce groupe est indépendant de S . Pour X normal (= à links connexes) et p = 0 (resp. p maximal), ils montrent qu'on obtient les groupes de cohomologie $H^{n-1}(X)$ (resp. d'homologie $H_{i}(X)$). Dans [6], les conditions sur Xsont affaiblies, et ils prouvent l'invariance topologique des groupes $IH_{i}^{p}(X)$.

Le cas qui nous intéresse le plus est celui où la stratification S peut être prise à strates toutes de dimension paire, et où p est la perversité intermédiaire, donnée avec les notations ci-dessus par \mathbf{p}_{2k} = k-l (et \mathbf{p}_{2k+1} = k-l, ou k , indifféremment). Nous noterons $\mathbf{IH}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{X}\right)$ les tensorisés avec \mathbb{Q} des groupes obtenus. Ils vérifient la dualité de Poincaré ([4][5]). Après extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{R} , on peut les interpréter comme des groupes de cohomologie \mathbf{L}^2 (voir l'exposé de J. Cheegerà cette conférence).

Soit $X(\mathbb{C})$ l'espace topologique (topologie usuelle) sous-jacent à une variété algébrique complexe normale connexe, de dimension com-

plexe n . On peut prendre S à strates algébriques, donc automatiquement de dimension réelle paire. Les groupes d'homologie d'intersection, pour la perversité intermédiaire, sont donc définis. Pour X seulement supposée irréductible, de normalisée X, nous définissons $\mathrm{IH}_{i}\left(X(\mathfrak{C})\right):=\mathrm{IH}_{i}\left(X^{\sim}(\mathfrak{C})\right)$.

Tensorisés avec $\mathbb C$, ces groupes admettent une description en terme de modules holonomes. Pour la donner, il nous sera commode de travailler avec les modules holonomes algébriques (modules quasi-cohérents à connection intégrable satisfaisant à une condition de finitude convenable). Supposons X plongé dans une variété algébrique Z lisse purement de dimension complexe d. On suppose X fermé dans Z. Soit X^O le lieu lisse de X et j le morphisme d'inclusion de X^O dans Z. A isomorphisme unique près, il existe alors sur Z un unique module holonome irréductible à support dans X, noté j: $_{X}^{O}$ $_{X}$ $_{Y}$ $_{Y}$

$$IH_{i}(X(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} = IH^{d+n-i}(Z, \Omega^{*}(j_{!*} O_{X}^{o}))$$
.

Au membre de droite on prend au choix l'hypercohomologie de Z , muni de la topologie de Zariski, à valeurs dans $n^*(\textbf{j}_{!*}, \textbf{0}_{XO})$, ou l'hypercohomologie de Z(C) , muni de sa topologie usuelle, à valeurs dans le complexe de De Rham holomorphe à coefficients dans $\textbf{j}_{!*}, \textbf{0}_{XO}$. Pour X non nécessairement complète, on obtient ainsi la variante des groupes d'homologie d'intersection, obtenue en considérant des chaînes localement finies. Les groupes d'homologie d'intersection proprement dit de X(C) s'obtiennent en prenant l'hypercohomologie à supports compacts de Z(C) à valeurs dans $n^*(\textbf{j}_{!*}, \textbf{0}_{XO}) .$

Les groupes $IH_{\underline{I}}(X(\mathbb{C}))$, non tensorisés avec \mathbb{C} , admettent aussi une description comme groupes d'hypercohomologie. On montre que pour X une variété algébrique irréductible de dimension n, il existe un unique objet \underline{IC} de la catégorie dérivée $D(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$, à faisceaux de cohomologie $\underline{H^1}(\underline{IC})$ constructibles et nuls pour i $\mathbb{F}[-2n,-n]$, vérifiant les trois conditions suivantes.

- (a) Il existe un ouvert de Zariski dense U de X tel que sur U($\mathbb C$) soit isomorphe au complexe réduit au faisceau constant $\mathbb Q$, placé en degré -2n .
- (b) Pour i > -2n , la codimension (complexe) du support du faisceau

de cohomologie $\underline{H}^{1}(\underline{IC})$ est $\geq i-2n+1$.

(c) Toute sous-variété irréductible Z de X , de codimension c > 0 , admet un ouvert dense V tel que les faisceaux de cohomologie à support $\underline{H}_{V(\mathbb{C})}^{1}(\underline{IC})$ soient nuls pour $\underline{i} \leq -2n+c$. Muni de l'isomorphisme (a) , cet objet \underline{IC} est unique à isomorphisme unique près , et on a

$$IH_{i}(X(\mathbb{C})) = IH_{C}^{-1}(X(\mathbb{C}), \underline{IC})$$

Il nous sera commode de numéroter autrement les groupes $\mbox{IH}_{\hat{\mathbf{1}}}(X(\mathbb{C}))$. Dans la suite de cette introduction, nous poserons

$$\operatorname{IH}^{i}(X(\mathbb{C})) := \operatorname{IH}_{n-i}(X(\mathbb{C}))$$

et IC' = IC[-n], de sorte que

$$IH^{i}(X(\mathbb{C})) = IH_{C}^{i}(X(\mathbb{C}), \underline{IC}^{i})$$

Les groupes $\operatorname{IH}_{\mathbf i}(X({\mathbb C}))$ (resp. $\operatorname{IH'}^{\mathbf i}(X({\mathbb C}))$) ne sont non nuls que pour $i \in [0,2n]$ (resp. $i \in [-n,n]$). Les conditions (b)(c) se récrivent : toute sous-variété irréductible propre Z de X , de dimension d , admet un ouvert de Zariski dense V tel que

- (b') pour i > -d, $H^{i}(IC')$ a une restriction à V(C) nulle;
- (c') pour $i \leq -d$, $\underline{H}_{V(\mathbb{C})}^{i}(\underline{IC}^{i}) = 0$.

Soit X une variété algébrique complexe. Nous définissons un <u>faisceau pervers</u> sur X comme un objet K de la catégorie dérivée $D(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$, à faisceaux de cohomologie \underline{H}^1K constructibles et nuls pour |i| assez grand (i.e., $K \in D^b_C(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$, vérifiant les conditions (b")(c") suivantes : toute sous-variété irréductible Z de X, de dimension d , admet un ouvert de Zariski dense V tel que

- (b") pour i > -d, $H^{i}(K) | V(\mathbf{C}) = 0$;
- (c") pour i < -d, $\frac{H^{i}}{V(C)}(K) = 0$.

Noter que, pour $\, X \,$ irréductible, on n'exclut pas $\, Z = X \,$. Pour $\, X \,$ irréductible, $\, \underline{IC'} \,$ est un faisceau pervers.

La condition (b") équivaut à

$$\dim \operatorname{Supp} \underline{H}^{i} K \leq -i$$

(d'où $\underline{H}^{i}K = 0$ pour i > 0). Une condition de ce type avait été intro-

duite par M. Artin dans sa preuve du théorème de dimension cohomologique des variétés affines (SGA 4 XIV $\S 2$ à 4).

Des conditions du type (c") sont familières en théorie des faisceaux algébriques cohérents, sous le nom de conditions de profondeur.

Les faisceaux pervers n'étant ni des faisceaux, ni pervers, la terminologie requiert une explication. Le mot "pervers" n'enchante pas certains de nous. Il vient de "perversité"; dans IHP(X), la "perversité" p indique de combien on permet aux cycles de dévier de la transversalité à une stratification. Pourquoi "faisceau" ? Si on travaille avec des coefficients complexes (plutôt que rationnels : remplacer $D_{\mathcal{C}}^{b}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})$ par $D_{\mathcal{C}}^{b}(X(\mathbf{C}),\mathbf{C}))$, et que X est lisse purement de dimension n , le foncteur $M \longmapsto \Omega^*(M)[n]$ (complexe de De Rham analytique) est une équivalence de la catégorie des modules holonomes (algébriques) à singularités réqulières (y compris à l'infini) sur X avec celle des faisceaux pervers sur X . Pour X quelconque, plongé dans Z lisse purement de dimension d (X fermé dans Z), il faut considérer les modules holonomes sur z à support dans X et le foncteur $M \longmapsto \Omega^*(M)[d][X(\mathbf{C})]$. Les modules holonomes sur X lisse sont des faisceaux (de $\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}$ -modules), et leurs propriétés suggèrent certaines de celles des faisceaux pervers. Par exemple les suivantes (avec à nouveau @ comme corps de coefficients).

- Les faisceaux pervers sur X forment une catégorie abélienne.
- Ce sont des objets de nature locale : les catégories des faisceaux pervers sur les ouverts de Zariski U de X forment un champ. Prendre garde qu'il n'en va pas de même pour les catégories dérivées $D^b_{\sigma}(U(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \ .$
- Pour $j:U \longrightarrow X$, de fermé complémentaire $i:F \longrightarrow X$, on dispose d'un formalisme (foncteurs $j_1,j^*,j_*,i^*,i_*,i^*)$) proche de celui des faisceaux usuels. Nous noterons avec p en exposant à gauche les analogues pour les faisceaux pervers des foncteurs j_1,j^*,j_*,i^*,i_*,i^* . La règle expérimentale suivante dit quels résultats sur les catégories de faisceaux se généralisent aux faisceaux pervers : l'énoncé dual, obtenu en remplaçant les catégories de faisceaux par leurs opposées, et en échangeant j_1 et j_* , ainsi que i^* et $i^!$, doit être vrai. Par exemple :
- a) pour $\,^{\,F}$ faisceau pervers sur $\,^{\,X}$, on dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow P_{i_*}P_{i_!}F \rightarrow F \rightarrow P_{i_*}P_{i_!}F$$

(c'est vrai pour les faisceaux usuels, avec pour dual l'exactitude de $j_1j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^*F \longrightarrow 0$; par contre, pour les faisceaux pervers, on ne peut pas mettre comme pour les faisceaux usuels un zéro à gauche de cette suite duale);

b) pour F un faisceau pervers sur U, on dispose d'un morphisme naturel $\alpha: {}^p j_1 F \longrightarrow {}^p j_* F$. Dans le cas des faisceaux usuels, c'est un monomorphisme. L'énoncé dual : "c'est un épimorphisme" est en général faux et, pour les faisceaux pervers, α n'est en général pas un monomorphisme. Le foncteur $j_{1*}: F \longmapsto \operatorname{Im}({}^p j_1 F \longrightarrow {}^p j_* F)$ (prolongement intermédiaire) nous sera très utile.

Pour X irréductible de dimension n , U un ouvert de Zariski dense lisse et $\mathbb{Q}[n]$ le faisceau pervers sur $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ défini par le complexe réduit au faisceau constant \mathbb{Q} placé en degré -n , on a

$$\underline{IC}'(X) = j_{!*}(\mathbb{Q}[n])$$
.

A certains égards, les faisceaux pervers ont de meilleures propriétés que les faisceaux usuels. En voici des exemples.

- Dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers, chaque objet est de longueur finie (cf. l'énoncé analogue pour les modules holonomes).
- Pour $j:U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert affine, le foncteur pj_* est exact.
- La dualité de Verdier sur $D_{\mathbf{C}}^{\mathbf{b}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})$ transforme faisceaux pervers en faisceaux pervers. Ceci explique la dualité de Poincaré en homologie d'intersection, et est à rapprocher de l'existence d'une bonne dualité pour les modules holonomes sur X lisse.

Tant les faisceaux usuels, constructibles, que les faisceaux pervers forment une sous-catégorie abélienne $\mathcal C$ de $\operatorname{D}^b_{\mathbb C}(X(\mathbb C),\mathbb Q)$ et, dans les deux cas, on dispose de foncteurs $\underline H^i$ ("faisceaux de cohomologie") $\operatorname{deD}^b_{\mathbb C}(X(\mathbb C),\mathbb Q)$ dans $\mathcal C$, obéissant à un même formalisme (suites exactes longues, dévissage de K en les $\underline H^iK[-i],\ldots)$. La catégorie $\mathcal C$ des faisceaux usuels est bien adaptée aux foncteurs d'images inverses, celle des faisceaux pervers à la dualité de Verdier, et à l'étude de certaines images directes (morphismes affines, cycles évanescents, théorème de Lefschetz difficile relatif,...).

Pour X un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos k , le formalisme des faisceaux pervers se transpose sans difficulté en cohomologie ℓ -adique (ℓ premier à l'exposant caractéristique de k). Il s'agit de remplacer $D^b_{\bf C}(X({\bf C}),{\bf Q})$ par la ${\bf Q}_{\ell}$ -catégorie dérivée $D^b_{\bf C}(X,{\bf Q}_{\ell})$. En particulier, on définit pour X irréductible des groupes d'homologie d'intersection ${\rm IH}_{\underline{\bf 1}}(X,{\bf Q}_{\ell})$. Pour $k={\bf C}$, ils sont canoniquement isomorphes aux groupes ${\rm IH}_{\underline{\bf 1}}(X({\bf C}))$ ${\bf O}_{\ell}$.

Pour un corps de base quelconque, on butte sur l'obstacle qu'il n'y a pas, dans la littérature, de définition utilisable de $D_{\mathbf{C}}^{b}(X,\mathbb{Q}_{\ell})$. 0. Gabber en a une, mais ne l'a pas rédigée. Heureusement, dans le cas des corps finis, qui nous intéresse particulièrement, une définition naı̈ve suffit. Elle suffit parce que, pour tout corps fini, $H^{*}(\operatorname{Gal}(\overline{k}/k),\mathbb{Z}/\ell)$ est fini.

Le résultat principal - plutôt un de ses avatars - est que pour X_O de type fini sur k fini, tout faisceau pervers mixte simple F_O sur X_O est pur. La propriété "mixte" est stable par toutes les opérations usuelles et de ce fait est en pratique toujours vérifiée ; "simple" est en tant qu'objet de la catégorie abélienne des faisceaux pervers. Pour X_O irréductible, le faisceau pervers \underline{IC}' est simple et mixte. Soient q le nombre d'éléments de k, \overline{k} une clôture algébrique de k, \overline{k} \overline{k} \overline{k} et \overline{k} l'image inverse de \overline{k} sur \overline{k} . La conclusion "pur" est une propriété locale qui, si \overline{k} est complète, assure que, pour un entier \overline{k} (le poids de \overline{k}), les valeurs propres du Frobenius \overline{k} sur \overline{k} sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue \overline{k}

En dimension un, ce résultat équivaut à [1] 1.8.4. Il a ensuite été obtenu dans des cas particuliers, liés aux variétés de Schubert, par D. Kazhdan et G. Lusztig La première démonstration générale est due à O. Gabber; elle diffère de celle donnée ici. Le théorème fournit une abondance de complexes purs, et donne par là quelque contenu à l'étude de ceux-ci faite dans [1] § 6.

Passons en revue les paragraphes de ce travail.

<u>Paragraphe 1</u>. Notre référence de base pour les catégories triangulées est J.L. Verdier [10] . Le n° l.l est consacré à des compléments, motivations et exemples.

Au n° 1.2, nous considérons une catégorie triangulée $\mathcal D$ munie d'une sous-catégorie pleine $\mathcal C$, soumise aux axiomes (1.2.0) et (1.2.4 (ii)) (sous-catégorie abélienne admissible). Si A est une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, et que $\mathcal D=\mathbb D^+(A)$, identifiée à la catégorie des complexes bornés inférieurement d'objets injectifs de A, pris à homotopie près, l'axiome 1.2.0 assure que si X et Y sont dans $\mathcal C$ et que $f,g:X \longrightarrow Y$ sont des morphismes de complexes homotopes, l'homotopie est unique à homotopie seconde près : deux homotopies H_1, H_2 de f à g sont reliées par une homotopie seconde g0 et ainsi de suite. Nous prouvons que g0 est abélienne.

Chaque t-structure (1.3.1) sur $\mathcal D$ définit une sous-catégorie abélienne admissible (1.2.5) $\mathcal C$ de $\mathcal D$ (1.3.6), appelée son coeur, et on a une réciproque partielle (1.3.13). Soient $\mathcal A$ une catégorie abélienne, $\mathcal C$ une sous-catégorie abélienne strictement pleine de $\mathcal A$, stable par noyaux, conoyaux et extensions, et $\mathcal D_{\mathcal C}(\mathcal A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée formée des $\mathcal K$ tels que les $\mathcal H^1\mathcal K$ soient dans $\mathcal C$. La paire de sous-catégories pleines $(\mathcal D_{\mathcal C}^{\leqslant O}(\mathcal A),\mathcal D_{\mathcal C}^{\geqslant O}(\mathcal A))$ de $\mathcal D_{\mathcal C}(\mathcal A)$ constitue une t-structure sur $\mathcal D_{\mathcal C}(\mathcal A)$, de coeur $\mathcal C$. Une régle expérimentale, illustrée par le n° 1.3, est que ce qui vaut dans ce cadre vaut pour toutes les t-structures. Par exemple : on dispose de foncteurs de troncation $\mathcal T$, d'un foncteur cohomologique $\mathcal H^{\mathcal O}: \mathcal D \longrightarrow \mathcal C$,.... Exception : en 3.1, nous utilisons des données supplémentaires sur $\mathcal D$ pour construire un foncteur naturel $\mathcal D^{\mathcal D}(\mathcal C) \longrightarrow \mathcal D$

Nous étudions aussi comment un foncteur exact T entre t-catégories (= catégories triangulées munies de t-structures) fournit un foncteur ^{p}T entre leurs coeurs, et ses propriétés d'exactitude et d'adjonction.

Au n° 1.4, nous donnons une méthode pour construire des t-structures. Au § 2, elle sera utilisée pour construire des t-structures de coeurs des catégories de faisceaux pervers. En gros, il s'agit, étant donnés un espace topologique X , un ouvert j : U \longleftrightarrow X et le fermé complémentaire i : F \longleftrightarrow X , de déduire une t-structure sur D(X) d'une t-structure sur D(U) et d'une sur D(F) . Pour D(U) et D(F) munies de translatées de leur t-structure naturelle (1.3.2), la t-structure obtenue est déjà non évidente.

Les besoins de la cohomologie l-adique nous forcent à nous placer

dans un cadre plus abstrait, où sont formalisées les relations entre D(X) , D(U) et D(F) . C'est dans ce cadre que nous développons le formalisme des foncteurs $j_{!},j^{*},j_{*},i^{*},i_{*},i^{!}$ entre catégories de faisceaux pervers, et celui du prolongement intermédiaire $j_{!*}$.

Paragraphe 2 . Au n° 2.1, nous considérons un espace stratifié (X,S) et itérons la construction 1.4 pour attacher à chaque fonction de perversité $p:S\longrightarrow \mathbb{Z}$ une t-structure sur D(X) . Il s'agit de recoller les t-structures naturelles des D(S) (S une strate), translatées de p(S) . Au n° 2.2, nous considérons des schémas, et des t-structures déduites par passage à la limite sur des stratifications algébriques de plus en plus fines des t-structures du n° 2.1. Nous traitons aussi du cas léadique.

 $\underline{\text{Paragraphe 3}}$. Dans ce paragraphe, plus technique, nous donnons quelques compléments. Le lecteur est invité à le sauter en première lecture.

Au n°3.1, nous exploitons les catégories dérivées filtrées. Elles nous permettent dans certains cas, pour $\mathcal D$ une t-catégorie de coeur $\mathcal C$, de définir un foncteur $\mathcal D^b(\mathcal C)\longrightarrow \mathcal D$ (3.1.10). Pour qu'il soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que pour chaque i >0 le foncteur $\mathcal C\times\mathcal C\longrightarrow (Ab): X,Y\longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal D}(X,Y[i])$ soit effaçable (3.1.1.6).

Au n° 3.2, nous donnons un critère pour recoller des objets de la catégorie dérivée donnés localement. Sous des hypothèses de nullité de faisceaux $\underline{H}^i R\underline{Hom}$ pour i < 0, le recollement se fait aussi bien que pour les faisceaux. Ceci s'applique aux faisceaux pervers. Le cas ℓ -adique avait été traité par une autre méthode en 2.2.19.

Au n°3.3, nous expliquons comment modifier le formalisme de la cohomologie d'intersection quand les coefficients sont \mathbb{Z} (ou \mathbb{Z}_{ℓ}) plutôt que \mathbb{Q} (ou \mathbb{Q}_{ℓ}).

Aux §§ 4 et 5, nous ne considérerons plus que des schémas de type fini sur un corps k (sauf en 4.4) et que la perversité intermédiaire. Au § 4, nous donnons des résultats géométriques : on ne perdrait guère en généralité en supposant k algébriquement clos. Au § 5, k est un corps fini, et les phénomènes étudiés sont arithmétiques (avec des conséquences géométriques après passage à la clôture algébrique de k).

<u>Paragraphe 4</u>. Au n° 4.1, nous énonçons le théorème de M. Artin (SGA 4 XIV 3.1) sur les images directes supérieures par un morphisme affine dans son cadre naturel, celui des faisceaux pervers. En 4.4, un théorème analogue est prouvé pour le foncteur "cycles proches".

Au n° 4.2, on donne des conséquences de 4.1 et de résultats connus, dans le language des faisceaux pervers et de leur fonctorialité.

Au n $^{\circ}$ 4.3, on montre que la catégorie des faisceaux pervers est artinienne et noethérienne.

Le n° 4.5 est préliminaire à la preuve du théorème de pureté 5.3.4. C'est une variation sur le thème : "le groupe de cohomologie de dimension moitié est le plus gros et le plus intéressant".

D'après [1] 3.3.1, 6.2.3, si K_O dans $D_C^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$ est de poids \leq W , les $H_C^i(X,K)$ sont de poids \leq W+i . Pour K_O un faisceau pervers, le théorème 5.2.1 donne une réciproque de ce résultat, ou plutôt de son dual $(H_C^i$ remplacé par H^i , et \leq par \geq). Il s'agit de tester sur les $H^O(U,K)$, pour U affine étale sur X . Il Y a lieu de penser à ce H^O comme à un groupe de cohomologie de dimension moitié. Pour U affine, il résulte de 4.1.1 que le foncteur $K \mapsto H^O(U,K)$ (K pervers) est exact à droite. On peut rapprocher son rôle de celui des foncteurs "fibre en un point" pour les faisceaux usuels (cf. 4.1.6).

Au n° 5.3, nous déduisons de 5.2.1 que tout sous-quotient d'un faisceau pervers mixte de poids \leq w est encore de poids \leq w (5.3.1), que le prolongement intermédiaire préserve les poids (5.3.2, 5.3.3) et que les faisceaux pervers mixtes simples sont purs (5.3.4). Si $K_{\rm O}$ et $L_{\rm O}$ sont deux faisceaux pervers sur $X_{\rm O}$, le groupe des classes d'extensions (dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers) de $K_{\rm O}$ par $L_{\rm O}$ est ${\rm Hom}(K_{\rm O},L_{\rm O}[1])$, calculé dans la catégorie ${\rm D}_{\rm C}^{\rm b}(X_{\rm O})$. Utilisant qu'une valeur propre de Frobenius de poids \neq 0 ne peut être

égale à 1, on prouve des nullités d'Ext 1 qui assurent l'existence (et la fonctorialité) sur tout faisceau pervers mixte d'une filtration par le poids W , croissante, avec Gr^W_i pur de poids i (5.3.5).

Soient K_O dans $D_C^b(X_O, Q_1)$, H^iK_O ses faisceaux de cohomologie (des Q_1 -faisceaux) et ${}^pH^iK_O$ ses faisceaux de cohomologie au sens pervers (des faisceaux pervers). Supposons K_O mixte. Par définition, K_O est de poids \leq w si et seulement si chaque H^iK_O est de poids \leq w+i . En 5.4.1, nous prouvons qu'il est de même nécessaire et suffisant que chaque ${}^pH^i(K_O)$ soit de poids \leq w+i (5.4.1). Par dualité, "poids \geq w" peut aussi se tester sur les ${}^pH^i(K_O)$, alors qu'il ne peut se tester sur les ${}^hH^i(K_O)$.

En 5.4.5 et 5.3.8, nous donnons deux résultats de semi-simplicité. Dans chaque cas, on part de K_O sur X_O, pur, et la conclusion porte sur l'image inverse K de K_O sur X : l'hypothèse est arithmétique, la conclusion géométrique. En 5.4.5, on prouve que K est isomorphe à la somme directe de ses $^{\rm p}{\rm H}^{\rm i}$ (K)[-i] . En 5.3.8, on prouve que chaque $^{\rm p}{\rm H}^{\rm i}$ K est une somme directe de faisceaux pervers simples. Compte tenu de ce que la pureté est stable par image directe par un morphisme propre, on en déduit des généralisations des théorèmes locaux et globaux des cycles invariants (5.4.7, 5.4.8, amplifiés par 5.4.9). En 5.4.10, on prouve une version relative du théorème de Lefschetz difficile.

Paragraphe 6 . Les résultats du § 5 ont des conséquences géométriques pour la cohomologie des schémas de type fini sur la clôture algébrique IF d'un corps fini. Au n° 6.1, nous expliquons des méthodes pour transférer ces résultats de IF à C. S'il s'agissait d'énoncés élémentaires de théorie des corps algébriquement clos, on pourrait simplement arguer que C est isomorphe à un ultraproduit de clôtures algébriques de corps finis. Les énoncés qui nous intéressent ne sont toutefois pas, du moins de prime abord, équivalents à des énoncés élémentaires, et il faut utiliser des résultats, de constructibilité notamment, auxquels on peut penser comme exprimant une certaine calculabilité de la cohomologie l-adique.

Au n°6.2, nous appliquons ces principes. Les résultats essentiels sont 6.2.5, 6.2.8, 6.2.9, 6.2.10.

Signalons que sur les points suivants, qui eussent trouvé leur place dans ces notes, nous avons failli à la tâche.

- La relation entre faisceaux pervers et modules holonomes. Comme indiqué dans cette introduction, elle a joué un rôle heuristique important. L'énoncé essentiel est 4.1.9 (non démontré ici).
- Les foncteurs cycles évanescents (sauf un résultat partiel au n°4.4). Modulo des définitions de catégories dérivées ℓ -adiques utilisables, et des définitions de morphismes "évidents" (i.e., il reste bien du travail à faire), on connaît des démonstrations pour les énoncés suivants .
- a) Soit X de type fini sur un trait (S,η,s) , et $R\Psi: D^b_C(X, \mathbf{Q}_{\underline{\ell}}) \longrightarrow D^b_C(X_S x_S S, \mathbf{Q}_{\underline{\ell}})$ le foncteur "cycles proches". Il est t-exact, en particulier induit un foncteur exact entre catégories de faisceaux pervers, et commute à la dualité de Verdier.
- b) Si S est l'hensélisé en un point fermé d'une courbe S_1 sur un corps fini, que X/S provient par changement de base de X_1 de type fini sur S_1 et que F_1 est un faisceau pervers mixte sur X_1 , on dispose d'une relation généralisant [1] 1.8.5 entre les filtrations par le poids de F_1 et de $\mathbb{R}^p_{\,\,\eta}(F_1\,|\,X_\eta)$, et la monodromie.

Au n°6.1, nous n'avons pas non plus exposé comment transférer de IF à C des conséquences géométriques de b).

Enfin, nous n'avons pas traité de la transformation de Fourier.

0.0. Notations et terminologie.

(E)

Le lecteur trouvera à la fin de ce travail un index terminologique et un index des notations, contenant les principaux termes ou notations nouvelles ou non standard utilisées.

Prendre garde qu'à partir de 1.4, nous notons en général simplement $f_*, f^*, f_!, f^!$ les foncteurs entre catégories dérivées de catégories de faisceaux notés d'habitude Rf_*, Rf^* (ou Lf^*), $Rf_!$ et $Rf^!$, les foncteurs de même nom entre catégories de faisceaux ordinaires étant notés avec un o en exposant gauche (ils correspondent à la perversité 0).

1. SOUS-CATÉGORIES ABÉLIENNES D'UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE.

1.1. Catégories triangulées.

Pour la définition et les propriétés fondamentales des catégories triangulées, nous renvoyons à J.L. Verdier [10]. Notre but dans ce numéro est d'expliquer les axiomes de Verdier - spécialement celui de l'octaèdre - et de donner quelques compléments.

1.1.1. Une catégorie triangulée est une catégorie additive \emptyset , munie d'un foncteur de translation $X \longmapsto X[1]$ et d'un ensemble de "triangles" $X \to Y \to Z \to X[1]$, les triangles distingués. On exige que le foncteur de translation soit une auto-équivalence de catégories et que l'ensemble des triangles distingués vérifie les axiomes TR 1 à TR 4 de [10]p3.

Nous noterons $X \longmapsto X[n]$ le $n^{\mbox{ième}}$ itéré du foncteur de translation $(n \in \mathbb{Z})$. Dans les diagrammes, une flèche de degré n sera affectée de (n). Les triangles distingués seront souvent notés linéairement : $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{\{1\}}$ (ou simplement (X,Y,Z)) pour



et on omettra de marquer (1) la flèche de degré l, si cela ne crée pas d'ambiguité. On pose $\operatorname{Hom}^n(X,Y) := \operatorname{Hom}(X,Y[n])$.

La catégorie opposée $\mathcal{D}^{\mathrm{opp}}$ de \mathcal{D} sera munie du foncteur de translation déduit de l'inverse de $X \longmapsto X[1]$. Une flèche de degré $n:X \to Y$ fournit donc dans $\mathcal{D}^{\mathrm{opp}}$ une flèche du même degré de Y dans X. Les $\underline{\mathrm{tri}}$ -angles distingués de $\mathcal{D}^{\mathrm{opp}}$ sont les triangles (Z,Y,X), pour (X,Y,Z) distingué dans \mathcal{D} . Munie de ces triangles, $\mathcal{D}^{\mathrm{opp}}$ est triangulée. Ceci permettra des raisonnements par dualité.

Dans une catégorie triangulée, tout morphisme f : X \rightarrow Y est la base d'un triangle distingué (X,Y,Z), unique à isomorphisme (en général non unique) près (voir 1.1.10 pour un cas d'unicité). On appellera le 3^{ème} sommet Z le (ou, plus correctement, un) <u>cône</u> de f. Un triangle distingué (X,Y,Z) donne lieu pour tout T à des suites exactes $\operatorname{Hom}(T,X) \rightarrow \operatorname{Hom}(T,Y) \rightarrow \operatorname{Hom}(T,Y) \rightarrow \operatorname{Hom}(T,Y) \rightarrow \operatorname{Hom}(Y,T) \rightarrow \operatorname{Hom}(X,T)$; les triangles distingués pouvant tourner (TR 2 : X $\overset{\vee}{\rightarrow}$ Y $\overset{\vee}{\rightarrow}$ Q $\overset{d}{\rightarrow}$ est distingué si et seulement si Y $\overset{\vee}{\rightarrow}$ Z $\overset{d}{\rightarrow}$ X[1] $\overset{-u[1]}{\rightarrow}$ 1'est), elles se

prolongent en suites exactes longues.

Les axiomes imposés aux catégories triangulées sont motivés par les exemples 1.1.2 à 1.1.5 suivants.

1.1.2. Soient A une catégorie additive, et KA la catégorie suivante : ses objets sont les complexes d'objets de A, et $\operatorname{Hom}_{KA}(K,L)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de complexes de K dans L. Le translaté K[1] de K est donné par $(K[1])^n = K^{n+1}$, la différentielle étant changée de signe. Si $\mathbb{Z}[1]$ est le complexe de \mathbb{Z} -modules réduit à \mathbb{Z} en degré -l,c'est, avec les conventions de signes usuelles, $\mathbb{Z}[1]$ $\otimes_{\mathbb{Z}} K$. Chaque suite exacte courte scindable degré par degré de complexes $O \to K \to L \to M \to O$ définit un triangle : on choisit un scindage s : $M \to L$ (pas un morphisme de complexes), et on définit le morphisme de degré 1 de M dans K comme étant ds-sd. Les triangles distingués sont ceux isomorphes à ceux ainsi obtenus. Le choix de signes fait coı̈ncide avec celui de [10], et diffère de celui de [7] ChI §2 et [8].

Pour tout morphisme de complexes $f: K \to L$, il existe $f': K' \to L'$, isomorphe à f dans KA, tel que chaque $f^{(i)}: K^{(i)} \to L^{(i)}$ soit un monomorphisme direct : ajouter à L le complexe homotope à zéro "cône" sur K et à f le morphisme évident de K dans son cône. Ceci explique TR l : toute flèche est la base d'un triangle distingué.

1.1.3. Dans [10]p.13-19, J.L. Verdier explique comment d'une catégorie triangulée en déduire d'autres par calcul de fractions. Pour A une catégorie abélienne, la <u>catégorie dérivée</u> DA est la catégorie triangulée déduite de KA en inversant les quasi-isomorphismes. Une suite exacte courte de complexes $O \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow O$ définit un triangle distingué dans DA([10] p.31).

1.1.4. Plus généralement, soit A une catégorie exacte au sens de (D.Quillen, Higheralgebraic K-theory I (p.15-16), dans Algebraic K-theory I, p.77-139, Lecture Notes in Math. 341 (1973)). C'est une catégorie additive, munie d'une classe E de "suites exactes courtes" vérifiant des axiomes convenables. Soit $(A,E)^{\sim}$ la catégorie des foncteurs contravariants exacts à gauche (i.e. transformant suites dans E en suites exactes $O \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$) de A dans la catégorie (Ab) des groupes abéliens. D'après loc. cit., les axiomes imposés à E équivalent à chacune des conditions suivantes :

(a) il existe un foncteur pleinement fidèle F de A dans une catégorie abélienne, avec FA stable par extensions, tel qu'une suite soit dans ℓ si et seulement si son image par F est exacte courte ;

(b) le foncteur A \longmapsto h_A de A dans (A,E) $^{\sim}$ est pleinement fidèle, et une suite est dans E si et seulement si son image est exacte courte.

Supposons que tout morphisme de A admette un noyau. Un complexe K d'objets de A sera dit <u>acyclique</u> si les suites $0 \to \text{Ker}(d^n) \to \text{K}^n \to \text{Ker}(d^{n+1}) \to 0$ sont exactes courtes, i.e. si l'image h_K de K dans $(A,E)^{\sim}$ est acyclique. La sous-catégorie pleine (acycl.) de KA formée des complexes acycliques est épaisse au sens de [10] p.13 . La <u>catégorie dérivée</u> DA est la catégorie KA/(acycl.) déduite de KA en inversant les morphismes dont le cône est acyclique.

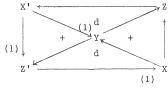
Exemple 1. Soient A une catégorie abélienne et FA la catégorie des objets filtrés de filtration finie de A. Disons qu'une suite $0 \to X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{q}{\to} Z \to 0$ d'objets de FA est exacte si gf = 0 et que les suites $0 \to Gr^n X \to Gr^n Y \to Gr^n Z \to 0$ sont exactes dans A. La catégorie DFA est la catégorie dérivée filtrée, déduite de KFA en inversant les quasi-isomorphismes filtrés.

Exemple 2. Soit A la catégorie des espaces de Banach. Les conditions de 1.1.4. sont vérifiées si on prend pour suites exactes courtes les suites $0 \to X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z \to 0$ qui deviennent exactes quand on oublie la topologie. Elles le sont aussi si on se limite à celles telles que la projection de Y sur Z ait une section continue (non nécessairement linéaire).

1.1.5. La catégorie homotopique stable (h. stable) est aussi une catégorie triangulée. Comme objets, on prend les paires (X,n), où X est un CW complexe fini pointé et $n \in \mathbb{Z}$. Le groupe $\operatorname{Hom}((X,n),(Y,m))$ est la limite inductive sur i des groupes de classes d'homotopie d'applications respectant le point-base : $S^{n+i}X \to S^{m+i}Y$. Le foncteur de translation est $(X,n) \longmapsto (X,n+1) \simeq (SX,n)$ et les triangles distingués sont définis à partir des plongements de sous-complexes $X \hookrightarrow Y$ (triangles $X \hookrightarrow Y \to Y/X \to SX \ldots$).

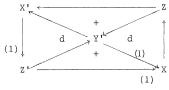
Le foncteur $H_0: (X,n) \longmapsto H_{-n}(X)$ (homologie réduite) est un foncteur cohomologique ([10] p.10) : (h. stable) \rightarrow (groupes abéliens). La construction "complexe des chaînes réduit" permet de le relever en un foncteur exact ([10] p.4) : (h. stable) \rightarrow D(groupes abéliens).

1.1.6. Le diagramme de l'octaedre est le suivant :



4 海

(calotte supérieure)



(calotte inférieure)

les pourtours de ces deux carrés coı̈ncident; les triangles marqués + sont supposés commutatifs, ceux marqués d distingués. De plus, on exige que coı̈ncident les deux flèches composées de Y à Y', via Z ou Z', et les deux flèches composées de Y' à Y, via X ou X'. Si on néglige le degré des flèches, on voit que ce diagramme admet une symétrie d'ordre 4 : faire un quart de tour, et échanger les calottes supérieures et inférieures (cf. 1.1.14).

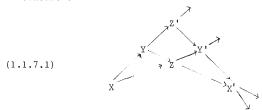
L'axiome TR 4 des catégories triangulées affirme que tout diagramme du type "calotte supérieure" peut se compléter en un diagramme de l'octaèdre. Le diagramme "calotte supérieure" consiste pour l'essentiel en deux triangles distingués ayant un sommet en commun (on complète en ajoutant des flèches composées). La position des flèches de degré l est imposée, mais on peut la changer en remplaçant des sommets par un translaté, et en utilisant l'axiome TR 2 pour faire tourner les triangles distingués (attention aux signes). Par exemple, un axiome équivalent à TR 4 (modulo TR 1 à TR 3) est :

octaèdre.

A isomorphisme près, se donner un diagramme "calotte supérieure" revient à se donner $X \to Y \to Z$ (bâtir des triangles distingués sur u et v; ils sont uniques à isomorphisme près). Cela revient aussi à se donner la calotte supérieure, complétée par le triangle distingué (X,Z,Y'). Que la calotte supérieure, complétée par (X,Z,Y'), puisse se compléter en un octaèdre est la formulation de TR 4 donnée dans [10].

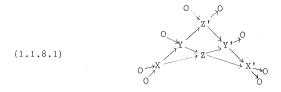
1.1.7. Illustrons l'axiome TR 4. Dans le cas de la catégorie triangulée KA de l'exemple 1.1.2., tout complexe filtré K à trois crans $0 = \mathbb{W}_{-1} \subset \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 = K, \text{ de filtration scindable degré par degré définit un octaèdre, de sommets les sous-quotients de K pour la filtration <math>\mathbb{W}$: pour X,Y,Z,X',Y',Z', prendre \mathbb{W}_0 , \mathbb{W}_1 , \mathbb{W}_2 , \mathbb{W}_2 , \mathbb{W}_1 , \mathbb{W}_2 , \mathbb{W}_2

Il est parfois commode de récrire comme suit le diagramme de l'octaèdre :



Cette écriture met en évidence les morphismes de triangles distingués $(X,Y,Z') \rightarrow (X,Z,Y') \rightarrow (Y,Z,X') \rightarrow (Z',Y',X')$ - à cela près que pour chacun de ces morphismes, un des carrés commutatifs correspondants n'est pas en évidence. Une symétrie est par ailleurs rompue, de sorte que le morphisme de triangles distingués $(Z',Y',X') \rightarrow (Z',X[1],Y[1])$ qui complète les précédents n'est pas, lui, en évidence.

1.1.8. On rapprochera (1.1.7.1) du fait que dans une catégorie abélienne, deux monomorphismes composables $X \to Y \to Z$ donnent lieu à un diagramme de suites exactes courtes :



AL 2

exprimant que (Z/X)/(Y/X) = Z/Y. Les diagrammes (1.1.7.1) et (1.1.8.1)ont entre eux le rapport suivant. Soit un diagramme (1.1.8.1) dans la catégorie abélienne C(A) des complexes d'objets de A. Chaque suite exacte courte dans C(A) définit un triangle distingué dans D(A) ([10] p.31) et les triangles distingués déduits des suites exactes courtes du diagramme (1.1.8.1) forment un octaèdre (1.1.7.1). Voici un cas particulier. Identifions la catégorie abélienne A à une souscatégorie pleine de DA, par A \longmapsto (le complexe réduit à A en degré 0). Pour toute suite exacte courte $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ de A, il existe alors une et une seule flèche d de degré 1 de C dans A telle que le triangle $A \rightarrow B \rightarrow C \stackrel{d}{\rightarrow}$ soit distingué : l'existence est cas particulier du fait que toute suite exacte courte de complexes détermine un triangle distingué ([10] p.31) et l'unicité résulte de 1.1.10 ci-dessous, et du fait que pour A et B dans A, Hom (A,B) est nul pour n < O (pour n > 0, c'est le n^{ième} Ext de Yoneda de A par B). Si on part d'un diagramme (1.1.8.1) dans A, et qu'on complète dans DA chacune de ses suites exactes courtes en un triangle distingué, on obtient un diagramme (1.1.7.1). C'est une conséquence de TR 4.

<u>Proposition</u> 1.1.9. <u>Soient</u> (X,Y,Z) <u>et</u>(X',Y',Z') <u>deux triangles distingués, <u>et</u> g : Y \rightarrow Y' :</u>

Les conditions suivantes sont équivalentes : (a) v'gu = 0, (b) \underline{il} existe f rendant commutatif le carré (1), (b') \underline{il} existe h rendant $\underline{commutatif}$ le carré (2), (c) \underline{il} existe un morphisme de triangles (f,g,h). \underline{Si} ces conditions sont vérifiées, \underline{et} que $\underline{Hom}^{-1}(X,Z') = 0$, \underline{le} $\underline{morphisme}$ f(resp. h) \underline{de} (b) (resp.(b')) \underline{est} unique.

L'exactitude de la suite $\begin{array}{l} \text{Hom}^{-1}(X,Z') \to \text{Hom}(X,X') \to \text{Hom}(X,Y') \to \text{Hom}(X,Z') \text{ , appliquée à gu dans} \\ \text{Hom}(X,Y'), \text{ montre que (a) } \Leftrightarrow \text{ (b) , avec unicité de f si } \text{Hom}^{-1}(X,Z') = 0. \\ \text{Que (b) } \Rightarrow \text{ (c) résulte de TR 2 : si f vérifie (b), il existe h tel que } \end{array}$

(f,g,h) soit un morphisme de triangle. La réciproque est triviale. Enfin, un argument dual fournit (a) \Leftrightarrow (b'), et l'unicité de h si $\operatorname{Hom}^{-1}(X,Z')=0$.

Corollaire 1.1.10. Soit $X \stackrel{u}{\rightarrow} Y \stackrel{v}{\rightarrow} Z \stackrel{d}{\rightarrow}$ un triangle distingué. Si $Hom^{-1}(X,Z) = 0$, alors

- (i) le cône de u est unique à isomorphisme unique près ;
- (ii) d est l'unique morphisme $x:Z\to X[1]$ tel que le triangle $x\stackrel{u}{\to}y\stackrel{y}{\to}z\stackrel{x}{\to}$ soit distingué.

Si dans 1.1.9. X = X', Y = Y' et que f,g sont identiques, Z est isomorphe à Z' - d'où $Hom^{-1}(X,Z') = 0$ - et (i) résulte de l'unicité de h. Pour (ii), on applique 1.1.9. à

On a nécessairement $h = Id_7$, d'où d = x .

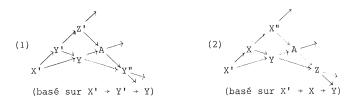
Dualement, dans 1.1.10 , le cône de v est unique à isomorphisme unique près.

La proposition suivante nous a été signalée par J.L. Verdier.

<u>Proposition</u> 1.1.11. <u>Tout carré commutatif</u> (X'Y'XY) <u>peut se compléter</u> en un diagramme des 9:

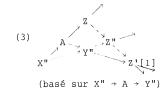
dans ce diagramme, les flèches pointillées se déduisent de flèches pleines en appliquant le foncteur de translation, les carrés sont commutatifs, sauf celui marqué - anticommutatif, et les lignes et colonnes en traits pleins sont des triangles distingués.

Choisissons des triangles distingués (X',Y',Z'), (X,Y,Z), (X',X,X''), (Y',Y,Y''), (X',Y,A) de base les côtés du carré commutatif donné, et sa diagonale $X' \to Y$. L'axiome TR 4 permet de compléter les octaèdres suivants :



puis l'octaèdre

4 3



dans lequel le triangle distingué (A,Y",Z'[1]) se déduit par rotation de (Z',A,Y") dans (1): on change le signe de la flèche : $Z' \to A$.

Les triangles distingués requis apparaissent dans ces octaèdres (sauf que (Z',Z,Z") apparaît sous l'avatar (Z,Z",Z'[1]) ; on déduit (Z',Z,Z") de (Z,Z",Z'[1]) en changeant le signe de la flèche $Z' \to Z$).

Pour prouver les (anti-) commutativités requises, on observe que

les flèches de X',Y',Z' dans X,Y,Z constituent le composé des morphismes de triangles (X',Y',Z') $\xrightarrow{(1)}$ (X',Y,A) $\xrightarrow{(2)}$ (X,Y,Z) figurant dans (1) et (2), que celles de X,Y,Z dans X",Y",Z" constituent le composé des morphismes de triangles (X,Y,Z) $\xrightarrow{(2)}$ (X'',A,Z) $\xrightarrow{(3)}$ (X'',Y'',Z''), et que celles de X'',Y'',Z'' dans X'[1], Y'[1], Z'[1] constituent le composé des morphismes de triangles (X'',Y'',Z'') $\xrightarrow{(3)}$ (A,Y'',Z''[1]) $\xrightarrow{(1)}$ (X'[1],Y'[1],Z'[1]) où la dernière flèche est déduite par rotation du morphisme de triangles de (1): $(Z',A,Y'') \rightarrow (Z',X'[1],Y'[1])$. Dans le triangle distingué (X'[1],Y'[1],Z'[1]), la flèche de degré 1 diffère par un signe de la translatée de la flèche de degré 1 du triangle (X',Y',Z'), ce qui explique 1'anticommutativité du 9 eme carré.

Remarque 1.1.12. Un carré de suites exactes de complexes définit un diagramme des 9 dans la catégorie dérivée. L'anti-commutativité du $9^{\text{ème}}$ carré précise l'anticommutativité des cobords correspondants.

Remarque 1.1.13. Dans les catégories triangulées usuelles (KA pour A additive, DA pour A exacte, la catégorie homotopique stable,...) tout diagramme du type "calotte supérieure d'un octaèdre" peut se complé-

ter en un octaèdre pour lequel les triangles suivants sont distingués

$$Y \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \oplus X[1] \xrightarrow{(1)} Y$$
 et
 $Y \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow Y' \xrightarrow{(1)} Y$

(les flèches sont celles de l'octaèdre, sauf respectivement Y' \rightarrow X[1], et Z' \rightarrow Y', qui sont opposées à celles de l'octaèdre). Nous ignorons ce qu'il en est en général. Si ces triangles devenaient utiles, il y aurait peut-être lieu de renforcer l'axiome TR 4 des catégories triangulées en redéfinissant "octaèdre" pour que ces triangles soient distingués par définition des octaèdres.

<u>Remarque</u> 1.1.14. Les diagrammes du triangle et de l'octaèdre admettent la généralisation suivante, dont ils sont les cas particuliers obtenus pour N = 3 et N = 4 . Pour N \geq 2 , le diagramme consiste en (a) Pour chaque intervalle I de $\mathbb Z$, avec O < # I < N , la donnée de K(I).

- (b) Pour I =[a,b[, et J = [c,d[, définissons I \leq J : \leftrightarrow (a \leq c et b \leq d). On donne des flèches ϕ_{JI} : K(I) \rightarrow K(J), pour I \leq J, telles que $\phi_{KJ}\phi_{JI} = \phi_{KI}$ et que ϕ_{II} =Id . Pour I = [a,b[, J = [c,d[et b \leq c , ϕ_{II} = 0 .
- (c) Pour I = [a,b[, définissons I* = [b,a+N[. On donne des isomorphismes $K(I^*) = K(I)[1]$ qui, pour I \leq J, rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{pmatrix} \mathsf{K}(\mathsf{I}) [1] & \mathsf{K}(\mathsf{I}^*) \\ \downarrow \varphi_{\mathsf{J}\mathsf{I}} [1] & \downarrow \varphi_{\mathsf{J}^*\mathsf{I}^*} \\ \mathsf{K}(\mathsf{J}) [1] & \mathsf{K}(\mathsf{J}^*) \\ \end{pmatrix}$$

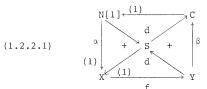
(d) Pour a < b < c < a+N , le triangle de flèches ϕ : $K([a,b[) \to K([a,c[) \to K([b,c[) \to K([b,a+N[) = K([a,b[)[1]$ est distinqué.

Un complexe filtré à (N-1) crans, de filtration scindable degré par degré, définit un tel diagramme dans KA. Si la filtration W de K est prise croissante, avec W_0 K = 0 et W_{N-1} K = K (i.e. Gr_i^W K = 0 pour i $\not\in$ [1,N-1]) , on a K([a,b[) = W_{b-1} K/ W_{a-1} K pour 1 \leq a < b \leq N et K({0}) = K[-1] .

1.2. Sous-catégories abéliennes.

1.2.0. Soient $\mathcal V$ une catégorie triangulée et $\mathcal C$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal V$. Nous supposerons que $\mathrm{Hom}^{\, \mathbf i}(X,Y)$: = $\mathrm{Hom}(X,Y[i])$ est nul pour i < 0 et X,Y dans $\mathcal C$.

Exemple 1.2.1. $\mathcal D$ est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne A , et $\mathcal C$ = A , identifiée à une sous-catégorie pleine de $\mathcal D$ par le foncteur A \longmapsto (le complexe réduit à A en degré O).



(<u>les triangles marqués + sont</u>
<u>commutatifs, ceux marqués</u> d
<u>sont distingués</u>).

Alors, $\alpha[-1]: \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ est un noyau de f dans \mathcal{C} , et $\beta: \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ un convoyau.

Pour Z dans \mathcal{C} , la suite exacte longue des Hom fournit grâce à 1.2.0. des suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Hom}^{-1}(Z,S) \rightarrow \text{Hom}(Z,X) \rightarrow \text{Hom}(Z,Y)$$
 et

$$O \rightarrow Hom(Z,N) \rightarrow Hom^{-1}(Z,S) \rightarrow O$$
.

Elles montrent que $(N,\alpha[-1])$ est un noyau de f . Un argument dual montre que (C,β) est un conoyau.

Exemple. Pour A \subset D(A) (exemple 1.2.1), le cône S de f : X \rightarrow Y est le complexe X $\stackrel{f}{\rightarrow}$ Y (X en degré -1, Y en degré 0). Il admet comme sous-complexe Ker(f)[1] = H⁻¹(S)[1] et le quotient X/Ker(f) \rightarrow Y s'envoie quasi-isomorphiquement sur Coker(f) = H^O(S) placé en degré 0. On a un diagramme (1.2.2.1).

1.2.3. Un morphisme $f: X \to Y$ de C sera dit C-admissible, ou simplement admissible, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur C, s'il est la base d'un diagramme (1.2.2.1). Sif est un monomorphisme, on a d'après 1.2.2. N = O, d'où $S \cong C$, et (1.2.2.1) se réduit à un triangle distingué (X,Y,C). Sif est un épimorphisme, on a C = O, d'où $N[1] \cong S$, et (1.2.2.1) se réduit à un triangle distingué (N,X,Y). Réciproquement, pour tout triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{G} Z \xrightarrow{d}$

avec X,Y,Z dans C, f et g sont admissibles, f est un noyau de g, et g un conoyau de f. D'après 1.2.0. et 1.1.10, d est déterminé par f et g.

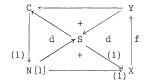
Une suite $X \to Y \to Z$ dans C est une <u>suite exacte courte admissible</u> si elle se déduit d'un triangle distingué en supprimant la flèche de degré 1.

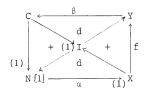
<u>Proposition</u> 1.2.4. <u>Supposons</u> C <u>stable par sommes directes finies</u>. <u>Les conditions</u> suivantes sont équivalentes :

(i) ℓ est abélienne, et ses suites exactes courtes sont admissibles.

(ii) Tout morphisme de C est C-admissible.

Prouvons que (ii) \Rightarrow (i). D'après 1.2.2., tout morphisme de $\mathcal C$ a un noyau et un conoyau et, pour prouver $\mathcal C$ abélienne, il reste à vérifier que $\mathrm{Coim}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$. Regardons (1.2.2.1) comme la calotte inférieure d'un octaèdre et appliquons TR 4' (cf.1.1.7.) pour la compléter en un octaèdre :





D'après 1.2.2., β est un épimorphisme, comme conoyau de f. D'après (1.2.3), le triangle (I,Y,C) étant distingué, I est dans C et est l'image de f. Dualement, le triangle distingué (N,X,I), déduit par rotation de l'autre triangle distingué de la calotte supérieure, montre que I est coimage de f. Enfin, d'après 1.2.3., les suites exactes courtes de C sont admissibles.

Prouvons que (i) \Rightarrow (ii). Les noyau N, conoyau C et image I de f : X \rightarrow Y fournissent deux suites exactes courtes O \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow O et O \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow C \rightarrow O, soit deux triangles formant le diagramme calotte supérieure ci-dessus. Appliquant TR 4, on en déduit la calotte inférieure : f est admissible.

<u>Définition</u> 1.2.5. <u>Une sous-catégorie pleine</u> C <u>de</u> \mathcal{D} <u>est</u> abélienne admissible si elle vérifie 1.2.0 et les conditions équivalentes de 1.2.4.

1.2.6. Dans une catégorie triangulée $\mathcal D$, on dira parfois qu'un objet Y est <u>extension</u> de Z par X s'il existe un triangle distingué (X,Y,Z). Une sous-catégorie $\mathcal D$ ' de $\mathcal D$ est <u>stable par extensions</u> si pour tout triangle distingué (X,Y,Z) avec X et Z dans $\mathcal D$ ', Y est dans $\mathcal D$ '.

1.3. t-catégories.

 $\frac{\text{Définition 1.3.1. }\underline{\text{Une}} \text{ t-catégorie }\underline{\text{est une catégorie triangulée}} \ \mathcal{V}, \ \underline{\text{mu-nie de deux sous-catégories strictement pleines}} \ \mathcal{V}^{\leq O} \ \underline{\text{et}} \ \mathcal{V}^{\geq O}, \ \underline{\text{telles}}$

que, posant $\mathcal{D}^{\leq n}$: = $\mathcal{D}^{\leq 0}$ [-n] et $\mathcal{D}^{\geq n}$: = $\mathcal{D}^{\geq 0}$ [-n], on ait

(i) Pour X dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et Y dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$, on a Hom(X,Y) = 0 .

(ii) On a $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0} \supset \mathcal{D}^{\geq 1}$.

(iii) Quel que soit X dans $\mathcal{D}^{<0}$ et B dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$. il existe un triangle distingué (A,X,B) avec A dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$.

On dira aussi que $(\mathcal{P}^{\leq 0}, \mathcal{P}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{P} . Son coeur est la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} := \mathcal{P}^{\leq 0} \cap \mathcal{P}^{\geq 0}$.

Exemples 1.3.2. (i) Soit A une catégorie abélienne. La t-structure naturelle sur DA est celle pour laquelle (DA) $^{\le n}$ (resp. (DA) $^{\ge n}$) est la sous-catégorie des complexes K tels que $\operatorname{H}^1 K = 0$ pour i > n (resp. i < n), i.e. quasi-isomorphes à un complexe K' nul en degrés > n (resp. < n). Vérifions 1.3.1.(iii). Pour tout complexe K, le tronqué $\operatorname{T}_{\le 0} K$ est le sous-complexe $\ldots \to K^{-1} \to \operatorname{Ker}(d^\circ) \to 0 \to \ldots$ de K.

Prendre garde que dans [7] ce tronqué est noté $\sigma_{\underline{<0}}$ K . Dans [8], il

est noté $t_{0]}$. Posons $\tau_{\geq 1} K := K/\tau_{\leq 0} K$. On a $\tau_{\leq 0} K \in (DA)^{\leq 0}$, $\tau_{\geq 1} K \in (DA)^{\geq 1}$ et la suite exacte courte $0 \to \tau_{\leq 0} K \to K \to \tau_{\geq 1} K \to 0$ fournit le triangle requis. La vérification de 1.3.1(i) et (ii) est laissée au lecteur.

(ii) Si $(\mathcal{D}^{\leq 0},\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} , pour tout entier n, $(\mathcal{D}^{\leq n},\mathcal{D}^{\geq n})$ en est une autre. On dira qu'elle se déduit de la première par translation.

(iii) Si $(\mathcal{D}^{\leq O}, \mathcal{D}^{\geq O})$ est une t-structure sur \mathcal{D} , alors $(\mathcal{D}^{\geq Oopp}, \mathcal{D}^{\leq Oopp})$ est une t-structure, dite <u>duale</u>, sur la catégorie triangulée opposée \mathcal{D}^{opp} . Ceci permettra des raisonnements par dualité (un énoncé est dit <u>dual</u> d'un autre s'il s'obtient en appliquant cet autre à la t-catégorie duale).

Soit D une t-catégorie.

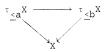
<u>soit distingué</u>. A isomorphisme unique près, <u>ce triangle est le seul</u> triangle distingué (A,X,B) <u>avec A dans</u> $\mathcal{D}^{\leq O}$ <u>et B dans</u> $\mathcal{D}^{\geq 1}$.

Par dualité et translation, il suffit de vérifier (i) pour $\mathfrak{D}^{\leq O}$. Il s'agit pour chaque X dans \mathfrak{D} de trouver A dans $\mathfrak{D}^{\leq O}$, muni de A \to X (la valeur de $\tau_{\leq O}$ en X), tel que pour tout T dans $\mathfrak{D}^{\leq O}$ on ait $\operatorname{Hom}(T,A) \xrightarrow{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(T,X)$. Soit (A,X,B) un triangle 1.3.1 (iii). La suite exacte longue des Hom et les conditions 1.3.1 (i) (ii) montrent que $\operatorname{Hom}(T,A) \xrightarrow{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(T,X)$: on a A = $\tau_{\leq O}$ X. Ceci prouve (i), l'existence d'un triangle distingué ($\tau_{\leq O}$ X,X, $\tau_{\geq 1}$ X), et le fait que tout triangle distingué 1.3.1 (iii) (A,X,B) est uniquement isomorphe à ce triangle, après oubli de la flèche de degré 1. L'unicité de cette dernière résulte de 1.3.1 (i) (ii) et de 1.1.10 (ii).

1.3.4. Le triangle distingué $(\tau_{\leq Q}X, X, \tau_{\geq 1}X)$ montre que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) $\tau_{\leq Q}X = 0$, i.e. (a') Hom(T,X) = 0 pour tout T dans $\mathcal{D}^{\leq Q}$;

(b) X $\xrightarrow{\tau}$ $\tau_{\geq 1}^{\times}$ X , i.e. (b') X est dans $v^{\geq 1}$. L'équivalence (a') \Leftrightarrow (b') s'énonce : $v^{\geq 1}$ est l'orthogonale à droite de $v^{\leq 0}$. Elle montre que $v^{\geq 1}$ est stable par extensions (1.2.6). Dualement, $\tau_{\geq 1}^{\times}$ X = 0 \Leftrightarrow X est dans $v^{\leq 0}$, $v^{\leq 0}$ est l'orthogonale à gauche de $v^{\geq 1}$, et est stable par extensions. En particulier, $v^{\leq 0}$ et $v^{\geq 1}$ sont stables par sommes directes finies.

Pour a \leq b , on a $\mathcal{D}^{\leq a} \subset \mathcal{D}^{\leq b}$ et il existe donc un et un seul morphisme de $\tau_{< a} X$ dans $\tau_{< b} X$ rendant commutatif le diagramme



Il identifie $\tau_{\leq a} X$ à $\tau_{\leq a} \tau_{\leq b} X$. Dualement, on dispose de $\tau_{\geq a} X \longrightarrow \tau_{\geq b} X$, identifiant $\tau_{>b} X$ à $\tau_{>b} \tau_{>a} X$.

Pour tout entier a, on écrira $\tau_{>a}$ pour $\tau_{\geq a+1}$ et $\tau_{<a}$ pour $\tau_{\leq a-1}$. On déduit par translation du premier alinéa que $x \in \mathcal{D}^{\leq a}$ équivaut à $\tau_{>a} X = 0$. Soit x dans $\mathcal{D}^{\leq a}$. Si b > a, on a donc $\tau_{\geq b} X = 0$. Si $b \leq a$, on a $\tau_{>a} \tau_{\geq b} X = \tau_{>a} X = 0$ envoie $\mathcal{D}^{\leq a}$ dans elle-même.

 gramme

9 4

C'est un isomorphisme

La flèche de $\tau_{\leq b} X$ dans $\tau_{\geq a} X \in \mathcal{D}^{\geq a}$ se factorise, de façon unique, par $\tau_{\geq a} \tau_{\leq b} X$. Puisque $\tau_{\leq a} \tau_{\leq b} X$ est dans $\mathcal{D}^{\leq b}$, elle se factorise ensuite, de façon unique, par $\tau_{\leq b} \tau_{\geq a} X$. Appliquons TR 4 à $\tau_{< a} X \to \tau_{\leq b} X \to X$. On obtient l'octaèdre

$$(1.3.5.1) \qquad \begin{array}{c} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ & \\ & \\ & & \\ & \\ & & \\ & \\ & \\ & & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ &$$

Dans cet octaèdre, Y est à la fois $\tau_{\underline{a}}\tau_{\underline{c}b}X$ (à cause du triangle distingué $(\tau_{\underline{a}}X,\tau_{\underline{c}b}X,Y)$, dans lequel $\tau_{\underline{a}}X=\tau_{\underline{a}}\tau_{\underline{c}b}X$) et $\tau_{\underline{b}}\tau_{\underline{c}a}X$ (à cause de $(Y,\tau_{\underline{a}}X,\tau_{\underline{b}}X)$).

On posera
$$\tau_{[a,b]}^X := \tau_{\geq a}^{\tau} \cdot b^X \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq b}^{\tau} \cdot a^X$$
.

Théorème 1.3.6. Le coeur $\mathcal{C}:=\mathcal{D}^{\leq 0}\cap\mathcal{D}^{\geq 0}$ de la t-catégorie \mathcal{D} est une sous-catégorie abélienne admissible de \mathcal{D} , stable par extensions (1.2.5, 1.2.6). Le foncteur $H^\circ:=\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}$ de \mathcal{D} dans \mathcal{C} est un foncteur cohomologique.

 $\underline{\text{Exemple}}$. Dans le cas 1.3.2 , C est la catégorie des objets de D isomorphes à un objet de A (pour son plongement naturel dans DA), et HO s'identifie au foncteur HO usuel.

<u>Preuve</u>. Soient X et Y dans C et f : X \rightarrow Y de cône S. Le triangle distingué (Y,S,X[1]) montre que S est dans $\mathcal{Q}^{\leq O} \cap \mathcal{Q}^{\geq -1}$. Les tronqués $\tau_{\geq O}$ S et $\tau_{\leq -1}$ S sont donc respectivement dans C et dans C[1], et le triangle distingué ($\tau_{\leq -1}$ S,S, $\tau_{\geq O}$ S) fournit un diagramme (1.2.2.1). Ceci prouve que C est abélienne admissible. Que C soit stable par extensions résulte de 1.3.4.

Il reste à prouver que pour tout triangle distingué (X,Y,Z), la suite $H^OX \to H^OY \to H^OZ$ est exacte.

Cas 1. Si X,Y et Z sont dans $\mathcal{P}^{\leq O}$, la suite $H^OX \rightarrow H^OY \rightarrow H^OZ \rightarrow O$ est

Pour U dans $\mathcal{D}^{\leq O}$ et V dans $\mathcal{D}^{\geq O}$, on a $H^OU = \tau_{\geq O}U$, $H^OV = \tau_{\leq O}V$, et $Hom(H^OU, H^OV) \xrightarrow{\sim} Hom(U, H^OV) \xrightarrow{\sim} Hom(U, V)$. Pour T dans \mathcal{C} (et donc dans $\mathcal{D}^{>0}$), la suite exacte longue des Hom fournit

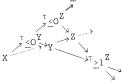
$$0 \longrightarrow \text{Hom}(Z,T) \longrightarrow \text{Hom}(Y,T) \longrightarrow \text{Hom}(X,T)$$
 , soit

$$O \longrightarrow Hom(H^{O}Z,T) \rightarrow Hom(H^{O}Y,T) \rightarrow Hom(H^{O}X,T)$$
.

Ceci valant pour tout T, l'exactitude voulue en résulte.

Cas 2. Si X est dans $\mathcal{D}^{\leq O}$, la suite $H^{O}X \rightarrow H^{O}Y \rightarrow H^{O}Z \rightarrow O$ est exacte. Pour T dans $\mathcal{V}^{>1}$, la suite exacte longue des Hom fournit $\operatorname{Hom}(Z,T) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y,T)$.

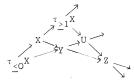
On a donc $\tau_{>1}^{}Y\xrightarrow{~~}\tau_{>1}^{}Z$. Appliquant TR 4' (cf. 1.1.7) à Y + Z + $\tau_{>1}^{}Z$ (ou, si l'on préfère, TR 4 à X \rightarrow $\tau_{<0}$ Y \rightarrow Y) :



on obtient un triangle distingué (X, $\tau_{<0}^{}Y, \tau_{<0}^{}Z)$ justiciable du cas l.

 $\underline{\text{Cas 2}}^{*}.\ \underline{\text{Dualement, si Z est dans}}\ \mathcal{D}^{>O}\ \text{, }\underline{\text{la suite}}\ \text{O}\ \rightarrow\ \text{H}^{O}\text{X}\ \rightarrow\ \text{H}^{O}\text{Y}\ \rightarrow\ \text{H}^{O}\text{Z}$ est exacte.

Cas général. TR 4 fournit un octaèdre



Le cas 2, appliqué à ($\tau_{<O} {\rm X,Y,U})$ fournit une suite exacte $H^{O}X \rightarrow H^{O}Y \rightarrow H^{O}U \rightarrow 0$, et le cas 2*, appliqué à $(U, Z(\tau_{s_1}X)[1])$ fournit $O \rightarrow H^OU \rightarrow H^OZ$. On en déduit l'exactitude de $H^OX \rightarrow H^O\overline{Y} \rightarrow H^OZ$.

Nous dirons qu'une t-structure est non dégénérée si l'intersection des $\mathcal{D}^{\leq n}$, et celle des $\mathcal{D}^{\geq n}$, sont réduites aux objets zéros. Posons $H^{1}X := H^{\circ}(X[i])$.

Proposition 1.3.7. Si la t-structure de $\mathcal V$ est non-dégénérée, <u>le sys-</u> tème des foncteurs H^{i} est conservatif, et pour que X dans D appartienne à $\mathcal{P}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{P}^{\geq 0}$), il faut et il suffit que les $\mathcal{H}^{1}X$ soient nuls pour i > 0 (resp. pour i < 0).

Soit X dans D. Montrons que si les H¹X sont tous nuls, alors X = 0 . Si X est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, l'hypothèse $H^{O}X = 0$ assure que X est dans $\mathcal{D}^{\leq 1}$; continuant, on trouve que X est dans l'intersection des $\mathcal{D}^{\leq n}$, donc est nul. Dualement, si $X \in \mathcal{D}^{>0}$, alors X = 0. Dans le cas général, $\tau_{<0} X$ et $\tau_{>1} X$ ont encore leurs \textbf{H}^{1} nuls, donc sont nuls, et on conclut par le triangle distingué ($\tau_{<0}X,X,\tau_{>1}X$).

Si un morphisme f : $X \rightarrow Y$, de cône Z, induit des isomorphismes $\operatorname{H}^{\dot{\mathbf{1}}}(\mathtt{X}) \xrightarrow{\ \ \ } \operatorname{H}^{\dot{\mathbf{1}}}(\mathtt{Y})$, la suite exacte longue de cohomologie montre que les $H^{1}(Z)$ sont nuls : Z = 0 , et f est un isomorphisme. Enfin, si les $\text{H}^{\dot{1}}(X)$ sont nuls pour i>0, tous les $\text{H}^{\dot{1}}(\tau_{>0}X)$ sont nuls, $\tau_{>0}X=0$ et (1.3.4) X est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$. Dualement pour $\mathcal{D}^{\geq 0}$.

1.3.8. Le théorème 1.3.6 , qui a une t-structure v sur v associe une souscatégorie abélienne admissible $\mathcal C$ de $\mathcal D$ admet une réciproque, énoncée ci-dessous (1.3.9). La démonstration nous occupera jusqu'en 1.3.14. Le résultat ne sera pas utilisé dans la suite de ces notes.

1.3.9. Soit D une catégorie triangulée. Soit Isom(D) l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal V$ et, pour X dans $\mathcal V$, soit [X] sa classe d'isomorphie. Nous noterons * l'opération suivante, qui à deux parties de $Isom(\mathcal{D})$ en associe une troisième :

 $A * B = \{[X] | il existe un triangle distingué (U,X,V) avec [U] \in A et$ $[V] \in B$ }.

Lemme 1.3.10. L'opération * est associative.

Preuve . Il suffit de montrer que pour X,Y,Z dans \mathcal{D} ,on a $(\{[X]\} * \{[Y]\}) * \{[Z]\} = \{[X]\} * (\{[Y]\} * \{[Z]\})$

Pour que [T] appartienne au membre de gauche (resp. de droite), il faut et il suffit que T figure dans un diagramme calotte supérieure (resp. inférieure)

$$\begin{array}{cccc}
Z & & & & & & & & \\
(1) & & & & & & & & \\
(1) & & & & & & & & \\
Y & & & & & & & & \\
\end{array}$$

15.19

L'inclusion ⊂ résulte donc de TR 4, et l'inclusion inverse de TR 4' . Le lemme 1.3.10 permet de définir le *-produit A_1^* ... * A_p d'une

suite de parties de Isom (\mathcal{V}) , sans devoir préciser comment sont mises les parenthèses. Il nous sera commode de définir le *-produit de la suite vide comme étant $\{[0]\}$.

1.3.11. Exemples . (i) Soient A une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal V$, et EA la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal V$ contenant A, les objets zéros, et stable par extensions. On a

(1.3.11.1) [EA] = $\bigcup_{q>0} [A] * ... *[A]$ (q facteurs).

(ii) Que tout morphisme de \mbox{A} soit $\mbox{A-admissible}$ (1.2.3) peut se reformuler

(1.3.11.2) [A] *[A[1]] \subset [A[1]] *[A] .

1.3.12. Soit $\mathcal C$ une sous-catégorie abélienne admissible, stable par extensions, de la catégorie triangulée $\mathcal V$.

Soient v^b (resp. v^b , \leq^0 ; v^b , \geq^0 ; v^b , 1 , pour I un intervalle de $\mathbb Z$) la plus petite sous-catégorie strictement pleine de v^b contenant les v^b pour v^b (resp. v^b); v^b , v^b) et stable par extensions (1.2.6).

 $\frac{\text{Proposition 1.3.13. } \underline{\text{Sur}}}{\underline{\text{dégénérée}}} \, \stackrel{\text{Pour}}{\text{0.5}} \, a \, \leq \, b \, , \, \underbrace{\text{on a}}_{0} \, p^b, [a,b] = p^b, \stackrel{\text{2d}}{\text{0.5}} \, n \, p^b, \stackrel{\text{2d}}{\text{0.5}} \, . \, \underbrace{\text{En particution non particution}}_{\text{En particution}} \, .$

L'axiome 1.3.1(i) des t-structures résulte de la suite exacte longue des Hom et de 1.2.0. L'axiome 1.3.1.(ii) est trivial. Parce que $\mathcal C$ est stable par extensions et vérifie 1.3.11(ii), on a, pour tout intervalle I = [a,b] de $\mathbb Z$ (a<b)

(1.3.13.1) $[\mathfrak{D}^{b,I}] = [\mathcal{C}[-a]] * \dots * [\mathcal{C}[-b]]$. Pour $a \le c < b$, J = [a,c] et K = [c+1,b], on a donc

 $[p^b, I] = [p^b, J] * [p^b, K]$.

En particulier, si c=0, on trouve que tout objet de $\mathcal{V}^{b,I}$ est extension d'un objet de $\mathcal{V}^{b,K}\subset\mathcal{V}^{b,\geqslant 1}$ par un objet de $\mathcal{V}^{b,J}\subset\mathcal{V}^{b,\leqslant 0}$. Puisque \mathcal{V}^{b} est la réunion croissante des $\mathcal{V}^{b,I}$, ceci prouve 1.3.1(iii).

D'après (1.3.13.1), si X est dans $\mathcal{D}^{b,I}$, il existe une suite de triangles distingués (X_i,X_{i+1},A_{i+1}) (a \leq i \leq b) avec X_a dans C[-a], chaque A_j dans C[-j], et $X_b = X$. Il est commode de poser $X_{a-1} = 0$, $A_a = X_a$ et de compléter cette suite par un premier triangle

 $(X_{a-1}, X_a, A_a) = (0, X_a, X_a)$. Appliquant la suite exacte longue de cohomologie à ces triangles, on prouve par récurrence sur j que, pour tout i, $H^i(X_j)$ est 0 pour $i \notin [a,j]$ et est $A_i[i]$ pour $i \in [a,j]$. En particulier,

[X] \in {[H^a(X)[-a]]} * ... * {[H^b(X)[-b]} (X est extension successive de ses objets de cohomologie, placés en leur degré respectif). De là résulte la non-dégénérescence de la t-structure (si les HⁱX sont nuls, X est nul) et le second énoncé de 1.3.13 (si X est dans \mathcal{D}^{b} , $\overset{>a}{\sim}$ 0 \mathcal{D}^{b} , $\overset{<b}{\sim}$, ses HⁱX sont nuls pour i \mathscr{C} [a,b]

Remarque 1.3.14. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, et \mathcal{C} une souscatégorie pleine vérifiant 1.2.0 et dont toute flèche est admissible. La preuve de 1.2.4 montre alors que toute flèche de \mathcal{C} a un noyau et un conoyau, que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Coim}(f)$ et que toute suite exacte courte de \mathcal{C}

est admissible. Pour être abélienne, il ne manque à $\mathcal C$ que l'existence

de sommes directes finies.

et donc X est dans $p^{b,[a,b]}$).

Soit C' la catégorie EC des extensions successives d'objets de C (1.3.11 (i)). La suite exacte des Hom montre que C' vérifie encore (1.2.0). Par ailleurs, on déduit de (1.3.11.1) (1.3.11.2) appliqués à C , et de l'associativité de * que [C'] * [C'[1]] \subset [C'[1]] * [C'] , i.e. que tout morphisme de C' est admissible : C' est une sous-catégorie abélienne admissible de D. Lui appliquant 1.3.13 , on obtient que, pour \mathcal{V}^{b} , $\mathcal{V}^{b,\geq 0}$ et $\mathcal{V}^{b,<-0}$ définis comme en 1.3.12 (à partir de C) , $(\mathcal{V}^{b,\leqslant 0}$, $\mathcal{V}^{b,\geqslant 0}$) est une t-structure sur \mathcal{V}^{b} , de coeur C'.

La proposition suivante fournit des intermédiaires entre les foncteurs $\tau_{<0}$ et $\tau_{<0}$.

<u>Proposition</u> 1.3.15. <u>Soient K dans</u> \mathcal{D} <u>et une suite exacte courte dans</u> \mathcal{C} $O \rightarrow A \rightarrow H^OK \rightarrow B \rightarrow O$.

- (i) II existe K' dans $\mathcal{D}^{\leq O}$, muni de a : K' \rightarrow K, tel que pour tout L dans $\mathcal{D}^{\leq O}$, a identifie Hom(L,K') au sous-groupe de Hom(L,K) formé des f tels que H°(f) se factorise par A. En d'autres termes, dans $\mathcal{D}^{\leq O}$, K' coreprésente le foncteur L \longmapsto Ker(Hom(L,K) \rightarrow Hom(H°(L),B). Pour qu'un couple (K',a) coreprésente ce foncteur, il faut et il suffit que (*) K' $\in \mathcal{D}^{\leq O}$, $\tau_{\leq O}$ K' $\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq O}$ K et H°K' $\xrightarrow{\sim}$ A \subset H°K.
- (iii) <u>Dualement</u>, <u>on obtient</u> b : $K \rightarrow K''$ <u>avec</u> $K'' \in \mathcal{D}^{\geq O}$ <u>et</u>, <u>pour</u> L <u>dans</u> $\mathcal{D}^{\geq O}$ une suite exacte $O \rightarrow Hom(K'',L) \rightarrow Hom(K,L) \rightarrow Hom(A,H^OL)$.

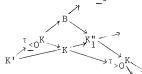
<u>Le couple</u> (K",b) <u>est caractérisé par</u> K" $\in \mathcal{D}^{\geq 0}$, $\tau_{>0}$ K $\xrightarrow{\sim} \tau_{>0}$ K" <u>et</u> H^{O} K" = B .

(iii) Il existe d : K" $\stackrel{\text{(1)}}{\longleftrightarrow}$ K' , unique d'après 1.1.10 , tel que (K',K,K") soit distingué.

Soient le morphisme composé $\tau_{\leq O} K \to H^O K \to B$ et K' complétant le triangle distingué (K', $\tau_{\leq O} K, B$). Ce triangle montre que K' est dans $\mathcal{D}^{\leq 1}$ et que $H^1 K' = O$, donc que K' est dans $\mathcal{D}^{\leq O}$. Pour L dans $\mathcal{D}^{\leq O}$, on a $\text{Hom}^{-1}(L,B) = O$, d'où une suite exacte

 $\begin{array}{c} \text{O} \, \mapsto \, \text{Hom}(L,K') \, \mapsto \, \text{Hom}(L,\tau_{\leq O}K) \, \to \, \text{Hom}(L,B) \, \, . \\ \\ \text{On a } \, \text{Hom}(L,\tau_{\leq O}K) \, \stackrel{\longrightarrow}{\longrightarrow} \, \text{Hom}(L,K) \, \, \text{et } \, \text{Hom}(L,B) \, = \, \text{Hom}(H^OL,B) \, : \, \text{la suite se} \\ \\ \text{récrit O} \, \mapsto \, \text{Hom}(L,K') \, \mapsto \, \text{Hom}(L,K) \, \mapsto \, \text{Hom}(H^OL,B) \, \, , \, \text{et } \, K' \, \, \text{coreprésente le} \\ \\ \text{foncteur (i). Pour L dans } \, \mathcal{V}^{<O} \, \, , \, \, \text{la propriété universelle de } \, K' \, \, \text{montre} \\ \\ \text{que } \, \tau_{<O}K' \, \stackrel{\longrightarrow}{\longrightarrow} \, \tau_{<O}K \, \, . \, \, \text{La suite exacte longue de cohomologie de} \\ \\ \text{(K', } \, \tau_{<O}K,B) \, \, \text{montre que } \, \text{H}^OK' \, \stackrel{\longrightarrow}{\longrightarrow} \, A \, \, . \, \text{Réciproquement, si } \, K'_1 \, \, \text{vérifie} \\ \\ \text{(*) } \, , \, \, \text{la propriété universelle de } \, K' \, \, \text{fournit un morphisme a } \, : \, K'_1 \, \mapsto \, K' \, \, \text{induisant par hypothèse des isomorphismes } \, \tau_{<O}K'_1 \, \mapsto \, \tau_{<O}K' \, \, \text{et} \\ \\ \text{H}^OK'_1 \, \mapsto \, \text{H}^OK' \, \, . \, \, \text{Le morphisme u est donc un isomorphisme. Ceci achève la preuve de (i). \, L'assertion (ii) s'obtient par dualité. \\ \end{array}$

Bâtissons un octaèdre sur K' \rightarrow $\tau_{<0}^{}$ K \rightarrow K :



Le triangle $(B,K_1^u,\tau_{>0}K)$ est du type 1.3.1 (iii) pour K_1^u . Il montre que K_1^u est dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$, avec $H^0K^u = B$ et $\tau_{>0}K \longrightarrow \tau_{>0}K_1^u$. D'après (ii), K_1^u s'identifie donc à K^u , et (K',K,K_1^u) est le triangle promis en (iii)

1.3.16. Soient $\mathcal{V}_{\mathbf{i}}$ (i = 1,2) deux t-catégories, $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$ le coeur de $\mathcal{V}_{\mathbf{i}}$ et notons ε le foncteur d'inclusion de $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbf{i}}$. Soit $\mathbf{T}:\mathcal{V}_{\mathbf{1}}\to\mathcal{V}_{\mathbf{2}}$ un foncteur exact ([10] p.4) de la catégorie triangulée $\mathcal{V}_{\mathbf{1}}$ dans la catégorie triangulée $\mathcal{V}_{\mathbf{2}}$. Nous dirons que \mathbf{T} est t-exact à droite si $\mathbf{T}(\mathcal{V}_{\mathbf{1}}^{\leqslant 0})\subset\mathcal{V}_{\mathbf{2}}^{\leqslant 0}$, t-exact à gauche si $\mathbf{T}(\mathcal{V}_{\mathbf{1}}^{\leqslant 0})\subset\mathcal{V}_{\mathbf{2}}^{\leqslant 0}$, et t-exact s'il est t-exact à droite et à gauche.

(ii) Pour T t-exact à gauche (resp. à droite) et K dans $\mathcal{D}_1^{\geqslant 0}$ (resp. $\mathcal{D}_1^{\leqslant 0}$), on a p TH o K $\xrightarrow{\sim}$ H o TK (resp. H o TK $\xrightarrow{\sim}$ PTH o K).

(iii) Soit (T^*, T_*) une paire de foncteurs exacts adjoints : $T^*: \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_1$ et $T_*: \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$, adjoint à droite de T_* . Pour que T^* soit t-exact à droite, il faut et il suffit que T_* soit t-exact à gauche, et dans ce cas $(^pT^*, ^pT_*)$ forment une paire de foncteurs adjoints $\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$.

(iv) Si $T_1: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ et $T_2: \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_3$ sont t-exacts à gauche (resp. à droite), $T_2 \circ T_1$ l'est aussi et $P(T_2 \circ T_1) = PT_2 \circ T_1$.

Si T est t-exact à gauche, pour toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ dans \mathcal{C}_1 , la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué (T(X),T(Y),T(Z)) fournit $0 \to H^0T(X) \to H^0T(Y) \to H^0T(Z)$, puisque T(Z) est dans $\mathcal{D}_2^{\geqslant 0}$. Ceci (resp. l'énoncé dual) prouve (i).

Pour K dans $\mathcal{D}_1^{\geqslant O}$, le triangle $(H^OK,K,\tau_{>O}K)$ fournit un triangle $(TH^OK,TK,T\tau_{>O}K)$ avec $T\tau_{>O}K$ dans $\mathcal{D}_2^{>O}$, dont la suite exacte longue de cohomologie fournit H^OT H^OK $\stackrel{\sim}{\longrightarrow}$ H^OTK . Ceci (resp. l'énoncé dual) prouve (ii).

Si T_* est t-exact à gauche, pour U dans $\mathcal{D}_1^{>0}$ et V dans $\mathcal{D}_2^{<0}$, on a $\operatorname{Hom}(T^*V,U) = \operatorname{Hom}(V,T_*U) = O$. Ceci valant pour tout U , on a $T_{>0}T^*V = O$, i. e. T^*V est dans $\mathcal{D}_1^{<0}: T^*$ est t-exact à droite. Pour A dans \mathcal{C}_1 et B dans \mathcal{C}_2 , on a alors $\operatorname{H}^OT^*B = \operatorname{T}_{\leq O}T^*B$ et $\operatorname{H}^OT_*A = \operatorname{T}_{\leq O}T_*A$, d'où un isomorphisme fonctoriel $\operatorname{Hom}(\operatorname{H}^OT^*B,A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(T^*B,A) = \operatorname{Hom}(A,T_*B) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}(A,H^OT_*B)$. Ceci, complété par dualité, prouve (iii).

Si T_1 et T_2 sont t-exacts à gauche et que $A \in C_1$, on a $T_1 A_1 \in \mathcal{D}^{\geq O} \quad \text{et} \quad ^{p}(T_2 \circ T_1) A = H^O T_2 T_1 A = H^O T_2 H^O T_1 A \text{ par (ii). Ceci, complété par dualité, prouve (iv).}$

Remarque 1.3.18 (i) Soient $\mathcal{D}_1^+ = \bigcup \mathcal{D}_1^{>n}$ et $\mathcal{D}_2^- = \bigcup \mathcal{D}_2^{< n}$. Le résultat (iii) vaut encore pour $\mathbf{T}^*: \mathcal{D}_2^- \to \mathcal{D}_1$ et $\mathbf{T}_*: \mathcal{D}_1^+ \to \mathcal{D}_2$, adjoints en ce sens que fonctoriellement $\operatorname{Hom}(\mathbf{T}^* \mathbf{V}, \mathbf{U}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{T}_* \mathbf{U})$, pour \mathbf{V} dans \mathcal{D}_2^- et \mathbf{U} dans \mathcal{D}_2^+ . La preuve est la même.

(ii) Pour A dans \mathcal{C}_1 et B dans \mathcal{C}_2 , les flèches d'adjonction pour $(\mathbf{T}_+^*, \mathbf{T}_+)$ et $(\mathbf{P}_{\mathbf{T}}^*, \mathbf{P}_{\mathbf{T}_+})$ sont liées par les diagrammes commutatifs

1.3.19. Soit $T: \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ un foncteur exact pleinement fidèle entre catégories triangulées. Pour qu'un triangle tr de \mathcal{D}' soit distingué, il suffit que son image Ttr par T le soit : si tr_1 est un triangle distingué de même base que tr, Ttr et Ttr_1 sont distingués de même base, donc isomorphes, et tr et tr_1 sont isomorphes.

Supposons $\mathcal D$ et $\mathcal D'$ munies de t-structures. et que $\mathbb T$ est t-exact. Pour que $\mathbb X$ dans $\mathcal D'$ soit dans $\mathcal D' \overset{\leq 0}{\longrightarrow} (\operatorname{resp.} \mathcal D' \overset{\geq 0}{\longrightarrow})$, il suffit que $\mathbb T \mathbb X$ soit dans $\mathcal D^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal D^{\geq 0}$) : on a $\mathbb X$ \in $\mathcal D' \overset{\leq 0}{\longrightarrow} \leftrightarrow \tau_{>0} \mathbb X$ = 0, et $\mathbb T$ commute à $\tau_{>0}$ (resp. argument dual).

Réciproquement, si \mathcal{D}' est une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie trianqulée \mathcal{D} , et que $(\mathcal{D}^{\leq O}, \mathcal{D}^{\geq O})$ est une t-structure sur \mathcal{D} , pour que $(\mathcal{D}^{\leq O}, \mathcal{D}^{\geq O})$:= $(\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}^{\leq O}, \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}^{\geq O})$ soit une t-structure sur \mathcal{D}' , il faut et il suffit que \mathcal{D}' soit stable sous le foncteur $\tau_{\leq O}$. Si cette condition est remplie, cette t-structure sur \mathcal{D}' s'appelle la t-structure induite . Pour \mathcal{D}' muni de la t-structure induite, le foncteur d'inclusion de \mathcal{D}' dans \mathcal{D} est t-exact : on a $\mathcal{C}' = \mathcal{D}' \cap \mathcal{C}$, et la restriction à \mathcal{D}' du foncteur $\tau_{\leq P}$, $\tau_{\geq P}$ ou \mathcal{H}^P de \mathcal{D} s'identifie au foncteur de même nom de \mathcal{D}' .

1.3.20. Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégories triangulées et $T: \mathcal{D}_i \to \mathcal{D}$ un multifoncteur exact (SGA 4 XVII 1.1.3) des \mathcal{D}_i dans une catégorie triangulée \mathcal{D} . Supposons les \mathcal{D}_i et \mathcal{D} munis de t-structures. On dira que T est t-exact à gauche (resp. à droite) s'il envoie le produit des $\mathcal{D}_i^{>0}$ (resp. $\mathcal{D}_i^{<0}$) dans $\mathcal{D}_i^{>0}$ (resp. $\mathcal{D}_i^{<0}$), et t-exact s'il 1'est à gauche et à droite. Si T est t-exact à gauche (resp. à droite. resp. -) et qu'on fixe certaines des variables à être un objet donné de $\mathcal{D}_i^{>0}$ (resp. $\mathcal{D}_i^{<0}$), resp. \mathcal{C}_i , le coeur de \mathcal{D}_i), le foncteur obtenu en les variables restantes est encore t-exact à gauche (resp. à droite, resp. -) . Ceci nous permettra d'appliquer à T des résultats prouvés pour les foncteurs d'une variable. Par exemple :

Soit ε_i l'inclusion de \mathcal{C}_i dans \mathcal{P}_i . Posons $^pT = H^0 \circ T \circ (\varepsilon_i)_{i \in I}$. Si T est t-exact à gauche (resp. à droite), le multifoncteur additif pT des \mathcal{C}_i dans \mathcal{C} est exact à gauche (resp. à droite).

Supposons T t-exact à gauche. Pour les $\mathbf{K}_{\underline{i}}$ dans les $\mathbf{D}^{\geq \mathsf{O}}$, on a alors

 $\begin{array}{lll} \text{par 1.3.17 (ii)} & {}^{p}_{T}(\text{H}^{\text{O}}\text{K}_{\underline{i}}) & \xrightarrow{\sim} & \text{H}^{\text{O}}_{T}(\text{K}_{\underline{i}}) \\ \text{Pour K}_{\underline{i}} \text{ quelconque, le morphisme } \text{K}_{\underline{i}} & + & \tau_{\geq 0}\text{K}_{\underline{i}} \text{ fournit un morphisme} \\ \text{(1.3.20.1)} & & \text{H}^{\text{O}}_{T}(\text{K}_{\underline{i}}) & + & \text{H}^{\text{O}}_{T}(\tau_{>0}\text{K}_{\underline{i}}) & \xleftarrow{\sim} & {}^{p}_{T}(\text{H}^{\text{O}}\text{K}_{\underline{i}}) \end{array} .$

Translatant, on obtient plus généralement, pour $\Sigma n_i = n$, un morphisme (1.3.20.2) $H^n T(K,) \rightarrow {}^p T(H^n i_{K, })$.

Il y a ici un problème de signes, qui n'apparaı̂t pas si on considère plutôt

(1.3.20.3) $H^{n}T(K_{i}) \rightarrow H^{n}T((H^{n_{i}}K_{i})[-n_{i}])$.

Pour T t-exact à droite, on a ${}^pTH^OK_i \leftarrow H^OTK_i$ pour K_i dans $\mathcal{D}_{\overline{1}}^{\leq O}$; les morphismes $\tau_{\leq O}K_i \rightarrow K_i$ fournissent un morphisme ${}^pT(H^OK_i) \rightarrow H^OT(K_i)$, et, translatant, des morphismes $(1.3.20.4) \quad H^nT((H^{n_i}K_i)[-n_i]) \rightarrow H^nT(K_i) \qquad (pour \Sigma n_i = n).$

Pour T t-exact, on dispose et de (1.3.20.3), et de (1.3.20.4) . Appliquant $\operatorname{H}^{\Pi}T$ aux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{cccc}
 & \xrightarrow{\tau_{\leq n_i} K_i} & \xrightarrow{H^{n_i} K_i [-n_i]} \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & \downarrow \\
 & K_i & \xrightarrow{\tau_{\geq n_i} K_i}
\end{array}$$

on trouve que le composé (1.3.20.3)。(1.3.20.4) est l'identité. Si $\Sigma n_{\bf i} = \Sigma m_{\bf i} = n \quad \text{ et que } (n_{\bf i})_{\bf i \in I} \neq (m_{\bf i})_{\bf i \in I} \text{ , il existe i tel que } n_{\bf i} < m_{\bf i} \text{ .}$ Le composé $\tau_{\leq n_{\bf i}} K_{\bf i} \to K_{\bf i} \to \tau_{\geq m_{\bf i}} K_{\bf i}$ est nul, et on en déduit que le composé ((1.3.20.3) pour $(m_{\bf i})$)。((1.3.20.4) pour $(n_{\bf i})$) est nul.

(1.3.21.1)
$$H^n T(K_{\underline{i}}) \simeq \bigoplus H^n T((H^n_{\underline{i}}K_{\underline{i}})[-n_{\underline{i}}])$$
 (somme pour $\Sigma n_{\underline{i}} = n$).

On a déjà vu que ces morphismes font du second membre un facteur direct du premier. Les deux membres de 1.3.21.1 sont des foncteurs cohomologiques en chaque ${\rm K}_i$ (pour le membre de droite, grâce à l'exactitude de ${\rm ^{p}_{T}}$) et les morphismes (1.3.20.3) et (1.3.20.4) sont des morphismes de foncteurs cohomologiques. Par dévissage, on se ramène à supposer chaque ${\rm K}_i$ dans ${\rm ^{c}}_i$; ce cas est trivial.

1.3.22. Exemples de t-structures (ne sera pas utilisé dans la suite de ces notes).

Soit, comme en 1.1.4 ,A une catégorie exacte, d'ensemble de suites exactes courtes £. On suppose que tout morphisme f : A → B admet un noyau tel que Ker(f) → A figure dans une suite exacte courte 0 → Ker(f) → A → Coim(f) → O . Soit $\mathcal{D}^{\leq O}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq O}$) la sous-catégorie de $\mathcal{D}:=\mathbb{D}A$ (1.1.4) formée des complexes K tels que les morphismes Coim(d^{1-1}) → Ker(d^{1}) soient des isomorphismes pour i > O (resp. i<0). En terme du plongement h : A → (A,E) $^{\sim}$ (1.1.4) , cela signifie que l'image h_K de K dans ((A,E) $^{\sim}$) est dans $\mathcal{D}^{\leq O}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq O}$). Montrons que ($\mathcal{D}^{\leq O}$, $\mathcal{D}^{\geq O}$) est une t-structure sur \mathcal{D} .

- (a) Pour K,L dans \mathcal{V} . Hom $_{\mathcal{D}}(K,L)=\lim$ ind Hom $_{K,A}(K',L')$, la limite étant prise sur les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes $K' \to K$ et $L \to L'$. Pour K dans $\mathcal{V}^{\leq O}$ (resp. L dans $\mathcal{V}^{\geq 1}$), un système cofinal de K' (resp. L') est obtenu en se limitant à ceux tels que $K'^{i}=0$ pour i>0 (resp. $L'^{i}=0$ pour i<0): utiliser le quasi-isomorphisme $\tau \subset O$ $K' \to K'$ (resp. $L' \to \tau_{\geq 1} L'$); $\tau_{\leq O}$ et $\tau_{\geq 1}$ sont comme en 1.3.2(i). Pour de tels K' et L', tout morphisme de complexes $f: K' \to L'$ est nul : il est défini par $f^{O}: K'^{O} \to L'^{O}$, vérifiant $df^{O}=0$, et donc nul car $d: L'^{O} \to L'^{1}$ est un monomorphisme. Ceci vérifie 1.3.1(i). L'axiome 1.3.1 (ii) est trivial.
- (b) Pour K dans KA , on dispose d'une suite exacte courte de complexes 0 + $\tau_{<0}$ K + K + $\tau_{\geq 1}$ K + 0 . Elle définit un triangle distingué dans DA : le cône sur $\tau_{<0}$ K + K s'envoie quasi-isomorphiquement sur $\tau_{\geq 1}$ K . Ceci vérifie 1.3.1 (iii).

On trouve en particulier que le coeur $\mathcal C$ de $\mathcal D$ est une catégorie abélienne. Les objets de $\mathcal C$ peuvent se représenter comme descomplexes $\mathcal K$ de longueur $1:\mathcal K^{-1}\to\mathcal K^O$, avec d un monomorphisme. Pour $\mathcal K$ et $\mathcal L$ de ce type, un morphisme de complexes $f:\mathcal K\to \mathcal L$ est uniquement déterminé par sa composante $f^O:\mathcal K^O\to\mathcal L^O$. Si on identifie $\mathcal K^{-1}$ et $\mathcal L^{-1}$ à des sous-objets de $\mathcal K^O$ et $\mathcal L^O$, $f^O:\mathcal K^O\to\mathcal L^O$ provient d'un morphisme de complexes f si et seulement si $f^O(\mathcal K^{-1})\subset\mathcal L^{-1}$, et f est homotope à zéro si et seulement si $f^O(\mathcal K^O)\subset\mathcal L^{-1}$. Que f soit un quasi-isomorphisme signifie l'exactitude de

 $O \rightarrow K^{-1} \rightarrow K^{\Theta} \oplus L^{-1} \rightarrow L^{O} \rightarrow O$

i i.e. que $K^0 \oplus L^{-1} \to L^0$ est un épimorphisme admissible, et que le sousobjet K^{-1} de K^0 est le pull-back de L^{-1} par f^0 .

On vérifie facilement que si K' $\xrightarrow{\phi}$ K est un quasi-isomorphisme

(avec K' concentré en degrés O et -1), et que f ϕ est homotope à zéro (f ϕ (K'O) \subset L^-1), f l'est aussi. Le groupe $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{K},\text{L})$ est la limite inductive, pour ϕ : K' \to K un quasi-isomorphisme de ce type, des $\text{Hom}_{KA}(\text{K'},\text{L}) = \{f: \text{K'}^O \to \text{L}^O | f(\text{K'}^{-1}) \subset \text{L}^{-1} \}/\{f|f(\text{K'}^O) \subset \text{L}^{-1}\}$ et, dans cette limite inductive, les morphismes de transition sont injectifs.

- 1.3.23. Exercices . (i)Pour K un complexe d'objets de A, H^OK dans C est le complexe $Coim(d^{-1}) \rightarrow Ker(d^O)$.
- (ii) Un foncteur F de A dans une catégorie abélienne N qui transforme suites dans E en suites exactes à droite FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0 se prolonge uniquement (à isomorphisme unique près) en F': C \rightarrow N, exact à droite. Si F est pleinement fidèle, et transforme suites dans E en suites exactes courtes et monomorphismes en monomorphismes, F' est exact et pleinement fidèle. En particulier, le foncteur composé C \rightarrow DA \rightarrow D((A,E) $^{\sim}$) $\stackrel{\text{H}}{\stackrel{}{=}}$ (A,E) $^{\sim}$ est pleinement fidèle. Il identifie C à la catégorie des quotients dans (A,E) $^{\sim}$ d'un objet de A par un sous-objet dans A.
- (iii) Le foncteur $D^-A \rightarrow D^-C$ (l'exposant $\bar{}$ indique qu'on se limite aux complexes bornés subérieurement) est une équivalence [utiliser que tout objet de C est quotient d'un objet de A].
- (iv) Soit A une catégorie abélienne. Les hypothèses de 1.3.22 sont vérifiées par FA (1.1.3 ex.2). Soient C la catégorie abélienne correspondante de quotients formels d'objets filtrés et C' la catégorie des suites ... \rightarrow Aⁱ \rightarrow Aⁱ⁻¹ \rightarrow ... avec Aⁱ = 0 pour i >> 0 et Aⁱ $\xrightarrow{\sim}$ Aⁱ⁻¹ pour i << 0 . Montrer que le foncteur ((V⁻¹,F) \rightarrow (V⁰,F)) \longmapsto (coker (FⁱV⁻¹ \rightarrow FⁱV⁰)) de C dans C' est une équivalence [appliquer (ii)] .
- 1.3.24. Exemple . Les hypothèses de 1.3.22 sont vérifiées pour A la catégorie des espaces de Banach, si on prend pour suites exactes courtes celles qui le deviennent après oubli de la topologie,i.e., d'après le théorème du graphe fermé, les suites isomorphes aux

Des quotients formels similaires ont été considérés par L. Walbroeck (Les quotients de b-espaces, preprint, Bruxelles, 1962).

1.4. Recollement.

1.4.1. Pour X un espace topologique (voire un topos), muni d'un faisceau d'anneaux θ , nous noterons $D(X,\theta)$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $M(X,\theta)$ des faisceaux de θ -modules à gauche sur X. Comme d'habitude, $D^+(X,\theta)$ est la sous-catégorie pleine image essentielle de celle des complexes bornés inférieurement.

Soient U une partie ouverte de X, F le fermé complémentaire, j l'inclusion de U dans X, i celle de F dans X et notons encore θ l'image inverse de θ sur U ou sur F. Nous nous proposons de décrire une construction qui, à une t-structure sur D⁺(U, θ) et une sur D⁺(F, θ), en attache une sur D⁺(X, θ).

Les catégories $\text{M}(X, \theta)$, $\text{M}(U, \theta)$ et $\text{M}(F, \theta)$ sont reliées par les foncteurs :

 $i^!: \text{M}(\text{X}.0) \to \text{M}(\text{F},0) : \text{sections à support dans F (exact à gauche).}$ Ils forment deux suites de 3 foncteurs adjoints $(j_!,j^!=j^*,j_*)$ et $(i^*,i_*=i_!,i^!)$. On a $j^*i_*=0$, d'où par adjonction $i^*j_!=0$ et $i^!j_*=0$. Pour tout faisceau F sur X, les flèches d'adjonction fournissent des suites exactes

$$0 \rightarrow j_! j^* F \rightarrow F \rightarrow i_* i^* F \rightarrow 0$$

$$(1.4.1.1) et$$

$$0 \rightarrow i_* i^! F \rightarrow F \rightarrow j_* j^* F$$

(qu'on peut compléter par un O à droite pour F injectif).

Pour toute paire de foncteurs adjoints (T^*, T_*), le morphisme d'adjonction $T^*T_* \rightarrow Id$. (resp. $Id \rightarrow T_*T^*$) est un isomorphisme si et seulement si T_* (resp. T^*) est pleinement fidèle. Les assertions (1.4.1.2) (1.4.1.3) équivalent donc à : i_* , j_* et j_* sont pleinement fidèles.

1.4.2.0. Quand un foncteur T entre catégories abéliennes est exact, il passe trivialement aux catégories dérivées. Nous noterons souvent

42

par le même symbole le foncteur, et son extension aux catégories dérivées. Cette extension est à la fois le dérivé gauche LT et le dérivé droit RT de T.

1.4.2.1. Les foncteurs 1.4.1 fournissent par dérivation (à droite) des foncteurs reliant D⁺(X,0), D⁺(U,0) et D⁺(F,0), formant deux suites de 3 foncteurs adjoints (j_!,j^{*},Rj_{*}) et (i^{*},i_{*},Ri[!]). On a j^{*}i_{*} = 0, d'où par adjonction i^{*}j_! = 0 et Ri[!]Rj_{*} = 0. Pour tout K dans K⁺(X,0), les suites (1.4.1.1) se dérivent en triangles distingués (j_!j^{*}K,K,i_{*}i^{*}K) et (i_{*}Ri[!]K,K,Rj_{*}j^{*}K).

Pour K dans $D^+(F, \theta)$ (resp. $D^+(U, \theta)$), (1.4.1.2) (resp. 1.4.1.3)) fournit des isomorphismes

En effet, j* et i* transforment injectifs en injectifs.

1.4.2.3 Les propriétés énumérées ci-dessus sont tout ce qui nous sera nécessaire pour recoller des t-structures. On les rencontre dans d'autres contextes - par exemple pour des catégories dérivées l-adiques, qui ne rentrent pas stricto sensu dans le cadre l.4.1. Pour pouvoir couvrir ces cas, nous nous placerons dans un cadre plus général l.4.3. Dans ce cadre, les catégories de faisceaux n'apparaissent plus (seules apparaissent les catégories triangulées) et nous en profitons pour alléger la notation en écrivant simplement j_{\ast} et i' pour ce qui cidessus eût été Rj_{\ast} et Ri $^{!}$.

1.4.3. Soient donc trois catégories triangulées $\mathbf{D},~\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{U}}}$ et \mathbf{D}_{F} et des foncteurs exacts

$$v_{r} \xrightarrow{i*} v \xrightarrow{j*} v_{r}$$
.

Il est parfois commode de poser $i_! := i_*$ et $j^! := j^*$. On suppose vérifiés (1.4.3.1) à (1.4.3.5) ci-dessous.

(1.4.3.1) i_{\ast} admet des adjoints à gauche et à droite exacts. On les note i^{\ast} et $i^{\,!}$.

(1.4.3.2) j^* admet des adjoints à gauche et à droite exacts. On les note j, et j^* .

(1.4.3.3) On a j *i_* = O . Par adjonction, on a donc aussi i $^*j_!$ = O et i $^!j_*$ = O et, pour A dans \mathcal{D}_F et B dans \mathcal{D}_U ,

$$\text{Hom}(j_B,i_A) = 0 \text{ et } \text{Hom}(i_A,j_B) = 0$$
.

(1.4.3.4). Quel que soit K dans \mathcal{D} , il existe $d: i_*i^*K \rightarrow j_!j^*K[1]$ (resp. $d: j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$), unique d'après (1.4.3.3) et 1.1.10, tel que le triangle

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \xrightarrow{d}$$
 (resp.
$$i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow j_*j^*K \xrightarrow{d})$$

soit distingué.

(1.4.3.5) i_* , $j_!$ et j^* sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction $i^*i_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow i^!i_*$ et $j^*j_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow j^*j_!$ sont des isomorphismes.

Ce formalisme est autodual, la dualité échangeant j $_!$ et j $_*$, ainsi que i * et i $^!$.

1.4.4. Soit T une catégorie triangulée, munie de deux sous-catégories strictement pleines stables par les translations $X \longmapsto X[n]$ (n $\in \mathbb{Z}$), U et V. On suppose que pour U dans U et V dans V on a Hom(U,V) = Oet que tout X dans T figure dans un triangle distingué (U,X,V) avec U dans U et V dans V; (U,V) est alors une t-structure sur T. D'après 1.3.4, V est l'orthogonal à droite de U et U l'orthogonal à gauche de V . En particulier, U et V sont des sous-catégories épaisses ([10]6.2 p.24). Les hypothèses (i) (ii) de [10] 6.4. p.25 sont vérifiées et d'après [10]p.23-26, la projection de T sur T/U a un adjoint à droite pleinement fidèle, d'image V, et celle de T sur T/V a un adjoint à quuche pleinement fidèle, d'image U . En d'autres termes, l'inclusion u(resp. v) de [[(resp. V) dans T a un adjoint à droite (resp. à qauche u. (resp. v') et les suites $0 \longrightarrow u \xrightarrow{u} \tau \xrightarrow{v} v \longrightarrow 0$ et 0 \longrightarrow V $\stackrel{\text{V}}{\longrightarrow}$ T $\stackrel{\text{u}}{\longrightarrow}$ U \longrightarrow 0 sont "exactes" en ce que v' (resp. u) identifie V (resp. U) au quotient de T par la sous-catégorie épaisse U (resp. V).

Faisons T = \emptyset , et prenons pour (U,V) les paires de sous-catégories ($i_* \mathcal{P}_{_{\rm T}}, j_* \mathcal{P}_{_{\rm H}}$) et ($j_* \mathcal{P}_{_{\rm H}}, i_* \mathcal{P}_{_{\rm E}}$). On obtient la

Proposition 1.4.5. Les suites

$$0 \longleftarrow p_{F} \stackrel{*}{\stackrel{i}{\rightleftharpoons}} p \longleftarrow j_{U} \longleftarrow 0$$

$$0 \longrightarrow p_{F} \stackrel{i_{*}}{\stackrel{i_{*}}{\rightleftharpoons}} p \stackrel{j_{*}}{\longrightarrow} p_{U} \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow p_{F} \stackrel{i_{!}}{\rightleftharpoons} p \longleftarrow j_{U} \longleftarrow 0$$

sont "exactes" au sens ci-dessus.

1.4.6. a) Le foncteur i_* étant pleinement fidèle, le composé des morphismes d'adjonction $i_*i^! \to \mathrm{Id} \to i_*i^*$ est le i_* d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.6.1)$$
 $i^! \longrightarrow i^*$.

Quand on l'applique à i_*X , et qu'on identifie $i^!i_*X$ et i^*i_*X à X , on obtient l'automorphisme identique de X.

b) Le foncteur j* étant un foncteur de passage au quotient (il identifie \mathcal{V}_U à une catégorie déduite de \mathcal{V} par calcul de fractions), le composé des morphismes d'adjonction $j_!j^* \to \mathrm{Id} \to j_*j^*$ provient d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.6.2)$$
 $j_! \longrightarrow j_*$

Si on identifie $j^*j_!$ et j^*j_* en foncteur identique, le j^* de (1.4.6.2) est l'automorphisme identique du foncteur identique.

c) Pour X dans v_U , le cône sur $j_! X \to j_* X$ est donc annulé par j^* : il est dans $i_* v_F$. D'après (1.4.3.3) et 1.1.10 , le triangle distingué de base $j_! X \to j_* X$ est unique à isomorphisme unique près - d'où un foncteur $j_*/j_!$: $v_U \to v_F$, donnant lieu à un triangle distingué fonctoriel

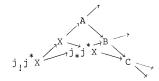
$$(1.4.6.3)$$
 $(j_1,j_*,i_*(j_*/j_1)).$

La construction duale fournirait un foncteur T: $\mathcal{D}_U \rightarrow \mathcal{D}_F$, caractérisé par un triangle distingué fonctoriel $(i_*T,j_!,j_*)$. Un triangle de ce type est déduit de (1.4.6.3) par rotation, d'où un isomorphisme $T = (j_*/j_!)[-1]$, tel que le morphisme $i_*T \rightarrow j_!$ soit le [-1] du morphisme de degré 1 de (1.4.6.3): les foncteurs $(j_*/j_!)$ et $(j_*/j_!)[-1]$ se déduisent l'un de l'autre par dualité.

Appliquant à (1.4.6.3) les foncteurs i^* et $i^!$, et utilisant que $i^*j_!=i^!j_*=0$, on obtient des isomorphismes

$$(1.4.6.4)$$
 $i^*j_* \xrightarrow{\sim} j_*/j_! \xrightarrow{\sim} i^!j_![1]$.

1.4.7. Soit X dans \mathcal{D} , et appliquons TR 4 aux morphismes d'adjonction $j_{,j}^*X \to X \to j_{*j}^*X$. Montrons que l'octaèdre obtenu

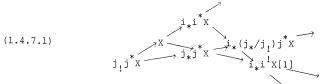


est unique à isomorphisme unique près, et fonctoriel en ${\tt X. }$

(a) D'après (1.4.3.3), (1.4.3.4) et 1.1.10 , il existe un unique isomorphisme $A = i_* i^* X$, qui identifie $X \to A$ à la flèche d'adjonction. Il

identifie (j $_1$ j*X,X,A) au triangle distingué (j $_1$ j*X,X,i $_*$ i*X) de (1.4.3.4).

- (b) Le même argument, appliqué à j_*j^*X , qui a le même j^* que X, identifie B à $i_*i^*j_*j^*X = i_*(j_*/j_!)j^*X$ (1.4.6.4), $j_*j^*X \to B$ étant la flèche d'adjonction de (i^*,i_*). D'après 1.1.9, un unique morphisme A \to B rend commutatif le losange supérieur de l'octaèdre. Le morphisme A \to B, i.e. $i_*i^*X \to i_*i^*j_*j^*X$, est donc celui déduit de $X \to j_*j^*X$ par fonctorialité.
- (c) Dualement, il existe un unique isomorphisme de C avec $i_*i^!x[1]$, identifiant la flèche de degré l de (X,j_*j^*X,C) au morphisme d'adjonction $i_*i^!X \rightarrow X$: le triangle (X,j_*j^*X,C) se déduit du triangle (1.4.3.4) $(i_*i^!X,X,j_*j^*X)$ par rotation $(TR\ 2)$, en changeant le signe de $j_*j^*X \xrightarrow{(1)} i_*i^!X$. Le morphisme $B \rightarrow C$ est l'unique qui rende commutatif le carré $(B,C,j_!j^*X,X)$. Via l'isomorphisme (1.4.6.4) de $j_*/j_!$ avec $i^!j_![1]$, c'est le morphisme $i_*(j_*/j_!)j^*X = i_*i^!j_!j^*X[1] \rightarrow i_*i^!X[1]$ déduit de $j_!j^*X \rightarrow X$ par fonctorialité.
- (d) Ceci détermine tous les sommets, et toutes les flèches de l'octaèdre (C $\stackrel{(1)}{\longrightarrow}$ A est le composé C $\stackrel{(1)}{\longrightarrow}$ X \rightarrow A), et prouve sa fonctorialité. Si on remplace A,B,C par leurs valeurs, il s'écrit



Le foncteur i_* étant pleinement fidèle, le triangle distingué $(i_*i^*X,i_*(j_*/j_!)j^*X,i_*i^!X[1])$ est le i_* d'un triangle, automatiquement distingué $(1.3.19),(i^*X,(j_*/j_!)j^*X,i^!X[1])$. Le i_* de la flèche d de degré 1 de ce triangle est le composé $i_*i^!X[1] \xrightarrow{(1)} X \rightarrow i_*i^*X$, de sorte que d est (1.4.6.1) pour X[1] (= le transformé par [1] de (1.4.6.1) pour X). Faisant tourner le triangle (TR 2), avec changement de signe de la nouvelle flèche de degré 1 et effaçant i_* (1.3.19), on obtient un triangle distingué fonctoriel

$$(1.4.7.2)$$
 $(i^!, i^*, (j_*/j_!)j^*)$

de base (1.4.6.1). Dans le cadre 1.4.1, 1.4.2 ce triangle provient de ce que pour tout faisceau flasque F, la suite

$$0 \rightarrow i \stackrel{!}{F} \rightarrow i \stackrel{*}{F} \rightarrow i \stackrel{*}{j_*} \stackrel{*}{j_F} \rightarrow 0$$

est exacte.

1.4.9. Supposons vérifiées les hypothèses de 1.4.3. et soient $(\mathcal{D}_U^{\leqslant 0},\mathcal{D}_U^{\geqslant 0}) \text{ une t-structure sur } \mathcal{D}_U, \text{ et } (\mathcal{D}_F^{\leqslant 0},\mathcal{D}_F^{\geqslant 0}) \text{ une t-structure sur } \mathcal{D}_F.$ Définissons

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\leq O} \; := \; \{\boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \boldsymbol{\mathcal{D}} \; | \; \; \boldsymbol{j}^* \boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \; \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\boldsymbol{U}}^{\leq O} \; \; \text{et } \; \boldsymbol{i}^* \boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \; \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\boldsymbol{F}}^{\leq O} \} \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\geq O} \; := \; \{\boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \boldsymbol{\mathcal{D}} \; | \; \; \boldsymbol{j}^* \boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \; \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\boldsymbol{u}}^{\geq O} \; \; \text{et } \; \boldsymbol{i}^! \boldsymbol{\kappa} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; \; \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\boldsymbol{F}}^{\geq O} \} . \end{array}$$

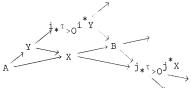
Théorème 1.4.10. Avec les hypothèses et notations précédentes, $(p^{<0}, p^{>0})$ est une t-structure sur p.

On dira qu'elle est déduite de celles de \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F par <u>recollement</u>. Vérifions les axiomes 1.3.1 (i) (ii) (iii).

Axiome (i). Soient X dans $\mathcal{D}_{-}^{\leq 0}$ et Y dans $\mathcal{D}_{-}^{\geq 1}$. Le premier triangle (1.4.3.4) pour X fournit une suite exacte

 $\begin{array}{c} \operatorname{Hom}(i_*i^*X,Y) \to \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(j_!j^*X,Y) \\ \operatorname{On\ a\ Hom}(i_*i^*X,Y) = \operatorname{Hom}(i^*X,i^!Y) = \operatorname{O\ ,\ par\ 1.3.1\ (i)\ pour\ } \mathcal{D}_F \text{ ,\ et} \\ \operatorname{Hom}(j_!j^*X,Y) = \operatorname{Hom}(j^*X,j^*Y) = \operatorname{O\ ,\ par\ 1.3.1\ (i)\ pour\ } \mathcal{D}_U \text{ .\ L'assertion\ en\ résulte.} \end{array}$

<u>Axiome</u> (iii). Soit X dans \mathcal{D} . Choisissons Y, puis A, donnant lieu à des triangles distingués $(Y,X,j_*\tau_{>0}j^*X)$ et $(A,Y,i_*\tau_{>0}i^*Y)$, et appliquons TR 4:



Appliquons les foncteurs $j^*, i^*, i^!$ à des triangles distingués de cet octaèdre, selon le schéma suivant, en tenant compte de (1.4.3.3) à (1.4.3.5):

$$j^{*}(i_{*}\tau_{>0}i^{*}Y,B,j_{*}\tau_{>0}j^{*}X) = (0,j^{*}B,\tau_{>0}j^{*}X) \quad \text{d'où } j^{*}B \xrightarrow{\sim} \tau_{>0}j^{*}X ,$$

$$j^{*}(A,X,B) = (j^{*}A,j^{*}X,\tau_{>0}j^{*}X) \quad \text{d'où } j^{*}A \approx \tau_{<0}j^{*}X ,$$

$$i^{*}(A,Y,i_{*}\tau_{>0}i^{*}Y) = (i^{*}A,i^{*}Y,\tau_{>0}i^{*}Y) \quad \text{d'où } i^{*}A \approx \tau_{<0}i^{*}Y ,$$

$$\begin{split} & \text{i}^! (\text{i}_{*^{\mathsf{T}} > 0} \text{i}^* \text{Y}, \text{B}, \text{j}_{*^{\mathsf{T}} > 0} \text{j}^* \text{X}) \ = \ (\tau_{> 0} \text{i}^* \text{Y}, \text{i}^! \text{B}, \text{O}) \\ & \text{On a donc A dans } \mathcal{D}^{\leq 0} \text{ et B dans } \mathcal{D}^{\geq 1} \text{ , et (A, X, B) vérifie (1.3.1) (iii)} \,. \end{split}$$

<u>Remarque</u> 1.4.11. Pour que la t-structure obtenue sur v soit non dégénérée, il faut et il suffit que celles données sur v_U et v_F le soient.

Nous n'aurons pas à utiliser, dans la suite de ces notes, la réciproque suivante à 1.4.10.

Proposition 1.4.12. Sous les hypothèses et avec les notations de 1.4.3., soit $(p^{\leq 0}, p^{\geq 0})$ une t-structure sur p. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) j_!j* est t-exact à droite;
- (i') j* est t-exact à gauche ;
- (ii) <u>la</u> t-structure de \mathcal{D} s'obtient par recollement.

L'équivalence (i) \Leftrightarrow (i') résulte de l.3.17(iii), et (i) (i') équivalent à l'axiome 1.3.1(i) pour (j* $\mathcal{D}^{\leq O}$, j* $\mathcal{D}^{\geq O}$). Les triangles distingués (j,j*,Id,i**) et (i**i¹,Id,j**) montrent respectivement que (i) et (i') impliquent que i**i est t-exact à droite et i**i¹ t-exact à gauche - conditions d'ailleurs équivalentes par 1.3.17 (iii), et signifiant que (i* $\mathcal{D}^{\leq O}$,i¹ $\mathcal{D}^{\leq O}$) vérifie l'axiome 1.3.1 (i).

Il est clair que (ii) \Rightarrow (i),(i') et que les t-structures sur \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F dont celle de \mathcal{D} est le recollement sont (j* $\mathcal{D}^{<0}$,j* $\mathcal{D}^{<0}$), sur \mathcal{D}_U , et celle induite par celle de \mathcal{D} , sur \mathcal{D}_F : (\mathcal{D}_F n $\mathcal{D}^{<0}$, \mathcal{D}_F n $\mathcal{D}^{<0}$) = = (i* $\mathcal{D}^{<0}$,i! $\mathcal{D}^{<0}$). Réciproquement, si (i)(i') sont vérifiées, on vérifie successivement que

- (a) $(j^*\mathcal{D}^{\leq 0}, j^*\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D}_U : 1.3.1 (i) a déjà été vérifié, 1.3.1 (ii) est clair, et 1.3.1 (iii) résulte de ce que j^* est essentiellement surjectif.
- (b) $(\mathbf{i}^* \mathcal{D}^{\leq 0}, \mathbf{i}^! \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D}_F : 1.3.1(i) a déjà été vérifié. Seul 1.3.1 (iii) est non trivial : pour X dans \mathcal{D}_F , la t-exactitude de \mathbf{j}^* montre que $\mathbf{j}^* \tau_{\leq 0} \mathbf{i}_* \mathbf{X} = \tau_{\leq 0} \mathbf{j}^* \mathbf{i}_* \mathbf{X} = \mathbf{0}$, et que de même $\mathbf{j}^* \tau_{\geq 0} \mathbf{i}_* \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Les tronqués $\tau_{\leq 0} \mathbf{i}_* \mathbf{X}$ sont donc dans $\mathbf{i}_* \mathcal{D}_F$: ils fournissent un triangle $(\mathbf{i}^* \tau_{\leq 0} \mathbf{i}_* \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{i}^* \tau_{> 0} \mathbf{i}_* \mathbf{X})$ qui vérifie 1.3.1. (iii).
- (c) Le foncteur identique de \mathcal{D} , muni de sa t-structure, dans \mathcal{D} , muni

de la t-structure recollée de $(j^*\mathcal{D}^{\leq O}, j^*\mathcal{D}^{\geq O})$ et $(i^*\mathcal{D}^{\leq O}, i^!\mathcal{D}^{\geq O})$ est t-exact. D'après 1.3.19 , la t-structure est donc obtenue par recollement.

1.4.13. Supposons seulement disposer d'une t-structure sur \mathcal{D}_F , et appliquons 1.4.10 à la t-structure dégénérée (\mathcal{D}_U ,0) sur \mathcal{D}_U , et à la t-structure donnée sur \mathcal{D}_F . Les foncteurs τ relatifs à la t-structure obtenue sur \mathcal{D} se noteront $\tau_{\leq p}^F$. Le foncteur $\tau_{\leq p}^F$ est adjoint à droite à l'inclusion de la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} formée des X tels que i X soit dans $\mathcal{D}_F^{\leq p}$. La preuve 1.4.10 de l'axiome 1.3.1 (iii) fournit un triangle distingué ($\tau_{\leq p}^F X, X, i_* \tau_{> p} i^* X$) (avec les notations de 1.4.10, on a X = Y). Les H p successifs, pour cette t-structure, sont donc les $i_* H^p i^* X$.

Dualement, on définit $\tau^F_{\geqslant p}$ en termes de la t-structure dégénérée $(0,\mathcal{D}_U)$ sur \mathcal{D}_U ; c'est l'adjoint à gauche de l'inclusion de $(i^!\bar{j}^1(\mathcal{D}_F^{\geqslant p}))$ dans \mathcal{D}_F , on dispose d'un triangle distingué $(i_*\tau_{< p}^i i^! x, x, \tau_{\geq p}^F x)$, et les H^P sont les $i_*H^P i^! x$.

De même, si on suppose seulement disposer d'une t-structure sur \mathcal{D}_U , et qu'on munit \mathcal{D}_F de la t-structure $(\mathcal{D}_F,0)$ (resp.(0, $\mathcal{D}_F)$), on définit sur \mathcal{D} une t-structure pour laquelle les foncteurs $\tau_{\leq p}$ (resp. $\tau_{\geq p}^U$), notés $\tau_{\leq p}^U$ (resp. $\tau_{\geq p}^U$), donnent lieu à des triangles distingués $(\tau_{\leq p}^U x, x, j_* \tau_{> p}^{*} j^* x) \ (\text{resp.}(j_! \tau_{< p}^{*} j^* x, x, \tau_{\geq p}^U x)) \ \text{et pour laquelle les } \mathbf{H}^P x$ sont les $j_* \mathbf{H}^P j^* x$ (resp. $j_! \mathbf{H}^P j^* x$).

La preuve 1.4.10 de l'axiome (iii) montre que $\tau_{\leq 0} = \tau_{\leq 0}^F \tau_{\leq 0}^U$. Translatant et dualisant, on obtient

$$(1.4.13.1) \tau_{\leq p} = \tau_{\leq p}^F \tau_{\leq p}^U \text{ et } \tau_{\geq p} = \tau_{\geq p}^F \tau_{\geq p}^U \text{ .}$$

Dans la situation 1.4.1 et pour la t-structure naturelle de D+ (F,0) , le foncteur $\tau_{\leq p}^F$ se déduit du foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux dans elle-même qui à un complexe K associe le sous-complexe qui coı̈ncide avec K sur U, et avec le sous-complexe $\tau_{\leq p}$ K(1.3.2) sur F.

Appelons <u>prolongement</u> d'un objet Y de \mathcal{D}_U un objet X de \mathcal{D} , muni d'un isomorphisme j * X \simeq Y . Un tel isomorphisme fournit par adjonction des morphismes j $_1$ Y \to X \to j $_*$ Y . Si un prolongement X est isomorphe en tant que prolongement, à $\tau^F_{\geq p}j_1$ Y (resp. $\tau^F_{\leq p}j_*$ Y), l'isomorphisme est unique, et on dira simplement que X = $\tau^F_{\geq p}j_1$ Y (resp. $\tau^F_{\leq p}j_*$ Y).

Soit X un prolongement de Y. Le triangle distingué (i X,(j*/j!)Y,i!X[1]) dont (1.4.7.2) est déduit par rotation montre que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) i X est dans \mathcal{D}_F^{sp-1} et i!X dans \mathcal{D}_F^{sp+1} , (b) i!X[1] est le $\tau_{\geq p}$ de (j*/j!)Y = i*j*Y, (b') i X est le $\tau_{\leq p-1}$ de (j*/j!)Y. Le triangle distingué (X,j*Y,i*i!X[1]) de (1.4.7.1) montre que (b) équivaut à ce que X soit $\tau_{\leq p-1}^F$. Dualement, (b') équivaut à ce que X soit $\tau_{\geq p+1}^F$!Y. Remarque 1.4.14.1. Soit \mathcal{D}_m la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} formée de des objets X vérifiant les conditions i X dans \mathcal{D}_F^{sp-1} et i!X dans

des objets X vérifiant les conditions i X dans $\mathcal{D}_F^{\otimes p-1}$ et i X dans $\mathcal{D}_F^{\otimes p+1}$ de 1.4.14. Le foncteur j induit une équivalence de catégories $\mathcal{D}_m \to \mathcal{D}_U$. Il admet en effet $\tau_{\leq p-1}^F j_*$ pour quasi-inverse. Nous noterons parfois p_{j_*} ce quasi-inverse.

1.4.15. Soient \mathcal{C} , \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_F les coeurs des t-catégories \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F ; \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F sont munies des t-structures données, et \mathcal{D} de la t-structure 1.4.10. Notons ε l'inclusion de \mathcal{C} , \mathcal{C}_U ou \mathcal{C}_F dans \mathcal{D} , \mathcal{D}_U ou \mathcal{D}_F , et pour T l'un des foncteurs $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}^*, \mathbf{j}_*, \mathbf{i}^*, \mathbf{i}_*, \mathbf{i}^!, \mathbf{notons}$ PT le foncteur \mathbf{H}^O . \mathbf{T} . ε . Par définition de la t-structure de \mathcal{D} , \mathbf{j}^* est t-exact, \mathbf{i}^* est t-exact à droite, et $\mathbf{i}^!$ est t-exact à gauche. Appliquant 1.3.17 (iii), on obtient

Proposition 1.4.16 (i) Les foncteurs $j_!$ et i^* (resp. j^* et i_* , resp. j_* et $i^!$) sont t-exacts à droite (resp. t-exacts, resp. t-exacts à gauche).

(ii) (pj, pj*, pj*) et (pi*, pi*, pi!) forment deux suites de 3 foncteurs adjoints.

$$\text{Hom}(^{p}_{j_{1}B},^{p}_{i_{*}A}) = \text{Hom}(^{p}_{i_{*}A},^{p}_{j_{*}B}) = 0$$
.

(ii) Quel que soit A dans C, les suites

$$p_{j_i}p_{j_i}^*A \rightarrow A \rightarrow p_{i_i}p_{i_i}^*A \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow p_{i_*}p_{i_!}A \rightarrow A \rightarrow p_{j_*}p_{j_!}A$$

sont exactes.

(iii) $^{p}i_{*}$, $^{p}j_{!}$ et $^{p}j_{*}$ sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjointion $^{p}i^{*p}i_{*}$ \rightarrow Id \rightarrow $^{p}i^{!p}i_{*}$ et $^{p}j^{*p}j_{*}$ \rightarrow Id \rightarrow $^{p}j^{*p}j_{!}$ sont des isomorphismes.

Ces assertions résultent respectivement de (1.4.3.3 , 4 et 5) . La vérification est laissée au lecteur (utiliser 1.3.17 (iv)).

Amplification 1.4.17.1. D'après (i) $({}^p j^* p_i_* = 0)$ et l'une quelconque des suites exactes (ii), pour que X dans C soit dans l'image essentielle \overline{C}_F de ${}^p i_*$, il faut et il suffit que ${}^p j^* X = 0$. Le foncteur ${}^p j^*$ étant exact , cette image essentielle est une sous-catégorie épaisse (i.e. stable par extensions et sous-quotients) de C. Si on identifie par le foncteur pleinement fidèle ${}^p i_*$ ${}^c C_F$ à la sous-catégorie \overline{C}_F de C, les adjonctions $({}^p i^*, {}^p i_*)$ et $({}^p i_*, {}^p i^!)$ ((1.4.16)(ii)) montrent que pour X dans C, ${}^p i^* X$ est le plus grand quotient de X qui soit dans ${}^c C_F$, et ${}^p i^! X$ est le plus grand sous-objet de X qui soit dans ${}^c C_F$.

Soit $Q: C \to C/C_F$ le foncteur de passage au quotient. Le foncteur exact p_j^* admet une factorisation T_0Q , et T est fidèle: si f dans C/C_F vient de f_1 dans C, et que f est tué par T, f_1 est tué par p_j^* , i.e. $Im(f_1)$ est dans l'image de C_F , et f_1 est tué par Q. Puisque f f puisque f f puisque f puisque

Lemme 1.4.19. Pour tout A dans C, les suites

$$0 \rightarrow p_{i_*H}^{-1}_{i_*A} \rightarrow p_{j_*p_{j_*A}} \rightarrow A \rightarrow p_{i_*p_{i_*A}} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow p_{i_{\star}}^{p_{i}!} A \rightarrow A \rightarrow p_{j_{\star}}^{p_{j}*} A \rightarrow p_{i_{\star}}^{l} i^{l} A \rightarrow 0$$

sont exactes.

Résulte de (1.4.3.4) et 1.4.16 (i).

Achevons la preuve de 1.4.18. D'après 1.4.19, le noyau et le conoyau de $^p j_! ^p j^* A \rightarrow A$ sont dans l'image de $^p i_*$. Tout objet de $^c / ^p i_* ^c _F$ a donc un représentant dans l'image de $^p j_!$. Pour $^p j_! X$ et $^p j_! Y$ dans cette image,

T:
$$\text{Hom}(Q^p_{j,X},Q^p_{j,Y}) \rightarrow \text{Hom}(TQ^p_{j,X},TQ^p_{j,Y}) = \text{Hom}(X,Y)$$

admet pour section $Q^p j_1$, donc est surjective. Ceci achève la preuve.

1.4.20. <u>Mise en garde</u>. Sous les hypothèses de 1.4.1, lorsque l'on munit $D^+(U, \theta)$ et $D^+(F, \theta)$ de leur t-structure naturelle (1.3.2 (i)), la t-structure obtenue sur $D^+(X, \theta)$ est la t-structure naturelle, et les catégories abéliennes C, C_U et C_F sont $M(X, \theta)$, $M(U, \theta)$ et $M(F, \theta)$. On retrouve la situation 1.4.1.

En général, toutefois, $^pj_!$ est exact à droite, mais non exact, $^pi^*$ est exact à gauche, mais non exact, et la première suite de 1.4.17(ii)

n'est pas exacte à gauche. Le formalisme 1.4.3. Étant autodual, seules peuvent être universellement vraies les formules vraies dans le cadre 1.4.1 et dont le dual l'est aussi.

1.4.21. Reprenons les arguments 1.4.6.

a) Le foncteur pi_* étant pleinement fidèle, le composé des morphismes d'adjonction $^pi_*p_i^! \to \text{Id} \to ^pi_*p_i^*$ est le pi_* d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.21.1)$$
 $p_i! \rightarrow p_i^*$.

Les diagrammes 1.3.18 (ii) pour (i^*,i_*) et $(i_*,i^!)$, et la t-exactitude de i_* fournissent pour A dans C un diagramme commutatif

d'où résulte que pour A dans C, le morphisme (1.4.21.1) : p_i A $^{+}$ Pi A est le composé

$$(1.4.21.2)$$
 $p_i!_{A \to i}!_{A} \xrightarrow{(1.4.6.1)} i^*_{A \to p_i}*_{A}$

Quand on applique (1.4.21.1) à $i_* A$ (A dans ${\rm C}_{\rm F}) \,,$ on obtient l'automorphisme identique de A.

b) Le foncteur $^pj^*$ étant un foncteur de passage au quotient (1.4.18), le composé des morphismes d'adjonction $^pj_!^pj^* \to \text{Id} \to \text{T}^pj_*^pj^*$ provient d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.21.3)$$
 $p_{j_!} \longrightarrow p_{j*}$.

Les diagrammes 1.3.18(ii) pour (j^*,j_*) et $(j_!,j^*)$, et la t-exactitude de j^* , fournissent pour A dans C un diagramme commutatif

d'où résulte que pour B dans $\mathcal{C}_{\mathbf{U}}$, le morphisme (1.4.6.2) de j $_{!}$ B dans j $_{*}$ B est le composé

$$(1.4.21.4) \quad j_{!}B \longrightarrow \tau_{\geqslant 0}j_{!}B = \quad {}^{p}j_{!}B \frac{(1.4.21.3)}{}{}^{p}j_{*}B = \tau_{< 0}j_{*}B \longrightarrow j_{*}B.$$

Quand on applique $^pj^*$ à (1.4.21.3), on trouve l'automorphisme identique du foncteur identique. En particulier, pour B dans CU , le noyau et le conoyau de (1.4.21.3) : $^pj_*B \rightarrow ^pj_*B$ sont dans pi_*C_F .

Pour B dans \mathcal{C}_U , (1.4.21.4) fournit la factorisation suivante du morphisme (1.4.6.2) de j_B dans j_*B :

$$(1.4.22.1) \quad j_{!}B \longrightarrow {}^{p}j_{!}B \longrightarrow j_{!}*B \longrightarrow {}^{p}j_{*}B \longrightarrow j_{*}B \quad .$$

Proposition 1.4.23. Pour B dans C_U , on a

$$p_{j_!B} = \tau_{\geq 0}^F j_!B = \tau_{\leq -2}^F j_*B$$

$$j_{!*}B = \tau_{>1}^{F}j_{!}B = \tau_{<-1}^{F}j_{*}B$$

$$p_{j_*B} = \tau_{>2}^F j_!B = \tau_{<0}^F j_*B$$
 .

Plus précisément, $^pj_!B$, muni de l'application $j_!B \rightarrow ^pj_!B$, est $\tau^F_{>0}j_!B$, et ainsi de suite.

Puisque j*j_!B est dans C_U , j_!B est son propre $\tau^U_{\geq 0}$. D'après (1.4.13.1), on a donc p j_!B = $\tau^F_{\geq 0}$ j_!B = $\tau^F_{\geq 0}$ j_!B; d'après 1.4.14, $\tau^F_{\geq 0}$ j_!B = $\tau^F_{<-2}$ j_{*}B. De même, p j_{*}B = $\tau^F_{\geq 2}$ j_!B = $\tau^F_{\leq 0}$ j_{*}B.

La détermination 1.4.13 des H^p pour la t-structure définissant les $\tau^F_{\geq p}$ fournit un triangle distingué $(i_*H^Oi^!j_!B,\tau^F_{\geq O}j_!B,\tau^F_{\geq 1}j_!B)$. Il

montre que $\tau_{\geqslant 1}^F j_! B$ est dans $\mathfrak{D}^{[-1,O]}$. Un argument dual fournit un triangle distingué $(\tau_{\le -1}^F j_* B, \tau_{\le O}^F j_* B, i_* H^O i_B^*)$ qui montre que $\tau_{\le -1}^F j_* B$ est dans $\mathfrak{D}^{[O,1]}$. Appliquant 1.4.14, on trouve que $\tau_{\ge 1}^F j_! B = \tau_{\le -1}^F j_* B$ est dans \mathfrak{C} , et les triangles ci-dessus deviennent des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow i_* H^0 i^! j_! B \longrightarrow p_{j_!} B \longrightarrow \tau_{\geq 1}^F j_! B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \tau_{<-1}^F j_* B \longrightarrow p_{j_*} B \longrightarrow i_* H^0 i^* j_* B \longrightarrow 0$$

Elles montrent que $\tau_{\geq 1}^{F} j_{!}B = \tau_{\leq -1}^{F} j_{*}B$ est bien l'image $j_{!*}B$ de $p_{j_{!}}B$ dans $p_{j_{*}}B$.

On applique 1.4.14. De même, ${}^pj_!B$ (resp. pj_*B) est l'unique prolongement X tel que i X soit dans ${}^p0_F^{<-2}$ (resp. ${}^p0_F^{<0}$) et que i X soit dans ${}^p0_F^{>0}$ (resp. ${}^p0_F^{>0}$).

Par définition, $j_{!}*B$ est dans $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$; pour X dans \mathcal{C} un prolongement de B, on a $i^{!}X\in\mathcal{D}_{F}^{\leqslant O}$, et $i^{!}X\in\mathcal{D}_{F}^{\leqslant -1}$ si et seulement si $p_{i}^{*}X=0$. Dualement, $i^{!}X$ est dans $\mathcal{D}_{F}^{\geqslant 1}$ si et seulement si $p_{i}^{!}X=0$. Identifions \mathcal{C}_{F} à $\overline{\mathcal{C}}_{F}$ par i_{*} . Puisque $p_{i}^{*}X$ (resp. $p_{i}^{!}X$) est le plus grand quotient (resp. sous-objet) de X qui soit dans \mathcal{C}_{F} (1.4.17.1) , la caractérisation 1.4.25 de $j_{!}*B$ reformule 1.4.24.

Puisque l'image essentielle \overline{C}_F de C_F par pi_* est une sous-catégorie épaisse de C, pour que S dans C soit simple, il faut et il suffit que soit (a) S est dans \overline{C}_F , et simple dans \overline{C}_F ; (b) S a une image simple dans C/\overline{C}_F , et aucun sous-objet ou quotient non-trivial dans \overline{C}_F . Le cas (a) donne les pi_* d'objets simples de C_F . D'après 1.4.25, le cas (b) donne les $j_{!*}$ d'objets simples de C_U .

2. FAISCEAUX PERVERS SUR LES ESPACES STRATIFIÉS ET SUR LES SCHÉMAS.

2.1. Espaces stratifiés.

2.1.1. Soient X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} , S une partition finie de X en parties localement fermées (appelées strates) et p une fonction $S \to \mathbb{Z}$ (appelée la <u>perversité</u>). Par définition de "partition", les strates sont non vides. On suppose que l'adhérence de chaque strate est réunion de strates. Ces conditions peuvent être relaxées : voir 3.2.19.

Rappelons (0.0) que pour $f: X \to Y$, nous noterons simplement $f_!, f_*, f^!, f^*$ les foncteurs entre catégories dérivées notés d'habitude $Rf_!, Rf_*, Rf^!, Rf^*$ (ou Lf^*). Pour une raison expliquée en 2.1.7., les foncteurs analogues entre catégories de faisceaux se noteront avec o en exposant à gauche.

 $\begin{array}{lll} \underline{\text{Définition}} & 2.1.2. & \underline{\text{La sous-catégorie}} & p_S^{<0}(x, \theta) & (\underline{\text{resp.}} & p_D^{>0}(x, \theta)) & \underline{\text{de}} \\ D(X, \theta) & \underline{\text{est la sous- catégorie formée des complexes}} & K & (\underline{\text{resp.}} & K & \underline{\text{dans}} \\ D^+(X, \theta)) & \underline{\text{tels que pour chaque strate}} & S & , & \underline{\text{notant}} & i_S & \underline{\text{l'inclusion de }} & S \\ \underline{\text{dans }} & X & , & \underline{\text{on ait}} & \underline{\text{H}}^n i_S^* K = 0 & \underline{\text{pour}} & n > p(S) & \underline{\text{(resp.}} & \underline{\text{H}}^n i_S^! K = 0 & \underline{\text{pour}} \\ \underline{\text{n < p(S))}}. \end{array}$

L'exactitude des foncteurs ^Oi * permet de reformuler la définition de ${}^pD^{\leq O}(X, \theta)$: pour que K soit dans ${}^pD^{\leq O}(X, \theta)$, il faut et il suffit que la restriction de H^1K à S soit nulle pour i > p(S). Les foncteurs $\tau_{\leq a}$ et $\tau_{\geq a}$, relatifs à la t-structure naturelle, envoient donc ${}^pD^{\leq O}(X, \theta)$ dans elle-même.

Si les foncteurs ${}^{\circ}i_{S}^{!}$ sont de dimension cohomologique finie, le foncteur $i_{S}^{!}: D^{+}(X, 0) \rightarrow D^{+}(S, 0)$ a une extension naturelle $D(X, 0) \rightarrow D(S, 0)$, et la condition "H $^{n}i_{S}^{!}K = 0$ pour n < p(S)" a un sens pour K non nécessairement dans $D^{+}(X, 0)$. Toutefois, elle implique que K est dans $D^{+}(X, 0)$. Plus précisément, si $p \geq a$, elle implique que K est dans $D^{>a}(X, 0)$: vérifions par récurrence descendante sur la strate S - pour l'ordre $S_{1} \subset \overline{S}_{2}$ - que les $H^{i}K$ sont nuls sur S pour i < a. Pour i < a, le triangle $(\tau_{<a}^{}K, K, \tau_{>a}^{}K)$ et l'exactitude à gauche de ${}^{\circ}i_{S}^{!}$ montrent que $H^{i}i_{S}^{!}\tau_{<a}^{}K \xrightarrow{} H^{i}i_{S}^{!}K$. L'hypothèse de récurrence assure que les $H^{j}\tau_{<a}^{}K$ sont nuls sur les strates $T \neq S$ telles que $S \subset \overline{T}$, donc que S admet un voisinage dans lequel $H^{j}\tau_{<a}^{}K$ soit à support dans S. Pour i < a, on a donc $H^{i}K|S = H^{i}i_{S}^{*}\tau_{<a}^{}K = H^{i}i_{S}^{!}\tau_{<a}^{}K = H^{i}i_{S}^{!}K$, et ce dernier groupe est nul par hypothèse.

Sans hypothèse de dimension cohomologique, le même argument s'applique pour K dans K $^+$ (X,0). Si les entiers a et b sont tels que a < p < b , on a

$$(2.1.2.1) \qquad \mathsf{D}^{\leqslant a}(\mathsf{X}, \theta) \ \subset \ ^p \mathsf{D}^{\leqslant O}(\mathsf{X}, \theta) \ \subset \ \mathsf{D}^{\leqslant b}(\mathsf{X}, \theta)$$
 et

$$D^{\geqslant a}(X, 0) \supset P_{D^{\geqslant 0}}(X, 0) \supset D^{\geqslant b}(X, 0)$$
.

On notera $^pD^+, ^{<0}(X, \theta)$ l'intersection de $^pD^+(X, \theta)$ et $^pD^{<0}(X, \theta)$. De même avec + remplacé par - , b et avec 0 remplacé par n .

Proposition 2.1.3. Pour chaque perversité p , $(^pD^+, \le ^O(X, 0)$, $^pD^{>O}(X, 0))$ est une t-structure sur $D^+(X, 0)$.

On procède par récurrence sur le nombre N de strates. Si N = 0 , on a X = Ø et l'assertion est claire. Si N = 1 , on retrouve la t-structure naturelle, translatée de p(X). Pour N ≥ 2 , soit F un fermé propre de X réunion de strates, et U l'ouvert complémentaire. Prendre par exemple pour F une strate fermée. L'hypothèse de récurrence s'applique à F et à U , munis des stratifications induites, et fournit des t-structures sur D $^+(U, 0)$ et D $^+(F, 0)$. La t-structure voulue sur D $^+(X, 0)$ s'en déduit par 1.4.10.

Corollaire 2.1.4. $({}^{p}D^{\leq 0}(X, \theta)$, ${}^{p}D^{\geq 0}(X, \theta))$ est une t-structure sur $D(X, \theta)$. Elle induit une t-structure sur $D^{*}(X, \theta)$ pour * = +, -, b.

Soient a et b deux entiers tels que a $\leq p \leq b$. Dans la preuve, (X, 0) sera fixe, et nous l'omettons de la notation. Soient K dans $p_D < 0$, L dans $p_D > 0$, et vérifions que $\operatorname{Hom}(K, L) = 0$. On a $\operatorname{Hom}(\tau_{\leq a} K, L) = 0$ parce que L est dans $D^{\geq a}$. On a $\operatorname{Hom}(\tau_{\geq a} K, L) = 0$ parce que $\tau_{\geq a} K$ est dans $p_D^{+}, \leq 0$: on peut appliquer 2.1.3. On conclut par la suite exacte longue des Hom déduite du triangle distingué $(\tau_{\leq a} K, K, \tau_{\geq a} K)$. Soit enfin K dans D. D'après 2.1.3., il existe un triangle distingué $(U, \tau_{\geq a} K, V)$ avec U dans $p_D^{+}, \leq 0$ et V dans $p_D > 0$. Appliquant TR 4 , on obtient deux triangles distingués $(\tau_{\leq a} K, Y, U)$ et (Y, K, V). Le premier montre que Y est dans $p_D < 0$. Le second vérifie 1.3.1 (iii). L'axiome 1.3.1 (iii) étant trivial, on a obtenu une t-structure sur D . On l'appellera la t-structure de perversité p.

Notons p_{τ} les foncteurs τ correspondants. Puisque $p_{D}^{\leqslant 0} \subset D^{\leqslant b}$ et $p_{D}^{\leqslant 0} \subset D^{\geqslant a}$, la suite exacte longue de cohomologie (usuelle) du triangle distingué ($p_{\tau} \in K, K, p_{\tau} \in K$) montre que $p_{\tau}^{i} \in K$ pour i < a. De même, $p_{\tau}^{i} \in K$ $p_{\tau}^{i} \in K$ pour $p_{\tau}^{$

respectent D^* (* = +,-,b).

C'est une sous-catégorie abélienne admissible de $D^b(X, 0)$.

Proposition 2.1.6. Soient U une partie localement fermée de X, réunion de strates, et j l'inclusion de U dans X. Pour toute perversité p , les foncteurs j : $D(U, 0) \rightarrow D(X, 0)$ et j* : $D(X, 0) \rightarrow D(U, 0)$ sont t-exacts à droite.

La vérification, immédiate, est laissée au lecteur.

D'après 1.3.17 (iii) , amplifié par 1.3.18 (i), les adjoints à droite j $^!$ et j $_*$ de j $_!$ et j * sont donc t-exacts à gauche.

2.1.7. Notation. Omettons (x, ℓ) de la notation. Nous écrirons parfois $D^{\leqslant p}$ (resp. $D^{\geqslant p}$) au lieu de ${}^pD^{\leqslant 0}$ (resp. ${}^pD^{\geqslant 0}$). Pour p de valeur constante a , on a $D^{\leqslant p} = D^{\leqslant a}$ (au sens de la t-structure naturelle), et $D^{\geqslant p} = D^{\geqslant a}$. Pour tout entier n, on a $D^{\leqslant p+n} = {}^pD^{\leqslant n}$ et $D^{\geqslant p+n} = {}^pD^{\geqslant n}$. Enfin, pour $p \le q$, on a $D^{\leqslant p} \subset D^{\leqslant q}$ et $D^{\geqslant p} \supset D^{\geqslant q}$. Ceci généralise (2.1.2.1). De même, on écrira $T_{\le p}$ et $T_{\ge p}$ pour $T_{\le 0}$ et $T_{\ge 0}$, et $T_{\ge 0}$ pour le $T_{\le 0}$ au sens de la t-structure de perversité p .

Dans la situation 2.1.6, nous noterons simplement $j_!,j_!j_*$ et j^* les foncteurs entre catégories dérivées, dérivés des foncteurs de même nom entre catégories de faisceaux. On notera avec p en exposant à gauche ceux qui s'en déduisent par passage aux faisceaux p-pervers. Par exemple, pour A dans $M(p,U,\partial)$ on pose $p_!j_!A = \tau_{\geqslant p}j_!A = H^p(j_!A)$. D'après 1.3.18 (i) , $(p_!j_!,p_!j_!)$ et $(p_!j_!,p_!j_!)$ sont deux paires de foncteurs adjoints.

Les foncteurs $j_!$, $j^!$, j_* , j^* pour les faisceaux usuels se notent avec o en exposant à gauche : ils correspondent à la perversité 0 .

Pour A un faisceau p-pervers sur U, j₁A est dans D^{\leq P}(X,0) et j_{*}A dans D^{\geq P}(X,0). Le morphisme naturel α : j₁A \rightarrow j_{*}A admet donc une factorisation

$$j_{,}A \rightarrow p_{j_{,}A} \xrightarrow{\beta} p_{j_{*}A} \rightarrow j_{*}A$$
 $(\beta = p_{H^{o}}(\alpha))$.

On définit le foncteur $p_{j_{!*}}$, ou simplement $j_{!*}$, par $j_{!*}$ A = Im($p_{j_{!}}$ A $\rightarrow p_{j_{*}}$ A).

Pour A un faisceau p-pervers sur X, on définit un morphisme canonique : $^pj^!A \rightarrow ^pj^*A$ comme composé $^pj^!A \rightarrow ^j^*A \rightarrow ^pj^*A$.

Pour U \xrightarrow{k} V \xrightarrow{j} X des parties localement fermées réunion de strates, les formules de transitivité $(jk)_! = j_!k_!, (jk)_* = j_*k_*$, $(jk)^! = k^!j^!$, $(jk)^* = k^*j^*$ fournissent (1.3.17 (iv)) des formules analogues pour les faisceaux p-pervers. Appliquons $^pj_!$, $^pj_!$ * et pj_* aux morphismes $^pk_! \xrightarrow{\sim} ^pk_* \xrightarrow{p} ^pk_*$. La chaîne obtenue

 $p_{(jk)} = p_{j_1} p_{k_1 \longrightarrow p_{j_1}} p_{k_1 \xrightarrow{p}} p_{j_1} p_{k_1 \xrightarrow{p}} p_{k_1 \xrightarrow{p}} p_{k_1 \xrightarrow{p}} p_{k_2 \xrightarrow{p}} p_{k_3} p_{k_4} p_{j_4} p_{k_5}$ fournit un isomorphisme de foncteurs

$$(2.1.7.1)$$
 $p_{(jk)_{1*}} = p_{j_{1*}} p_{k_{1*}}$

2.1.8. <u>Amplification</u>. Soient U un ouvert de X, réunion de strates, F le fermé complémentaire, et munissons-les des stratifications et perversités induites. La t-structure 2.1.3 sur D⁺(X,0) se déduit alors de celles de D⁺(U,0) et D⁺(F,0) par procédé de 1.4.10. Le formalisme de 1.4. est donc applicable . Soit i l'inclusion de F dans X, et j celle de U. Les foncteurs désignés d'après 2.1.7 par i ou j, affecté de ! ou de * , en exposant ou en indice, et affectés ou non de p en exposant à gauche - ainsi que j_{!*} - coı̈ncident avec les foncteurs notés de même en 1.4.

Plus précisément, il résulte de (1.4.14.1) que si \mathcal{D}' est la souscatégorie de D(X,0) formée des K tels que $\operatorname{H}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{s}}^{*}K=0$ pour $\mathbf{i} \geq p(\mathbf{s})$ et $\operatorname{H}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{s}}^{!}K=0$ pour $\mathbf{i} \leq p(S)$ pour toute strate $\mathbf{s}:S \rightarrow F$, \mathbf{j}^{*} induit une équivalence $\mathcal{D}' \rightarrow \mathrm{D}(\mathrm{U},0)$. Sa restriction à $\mathcal{D}' \cap \mathrm{M}(p,\mathrm{X},0)$ est une équivalence $\mathcal{D}' \cap \mathrm{M}(p,\mathrm{X},0) \rightarrow \mathrm{M}(p,\mathrm{U},0)$, d'inverse $\mathbf{j}_{\mathbf{j}*}$.

On caractérise de façon analogue $p_{j,B}$ et p_{j*B} (cf. 1.4.23,1.3.14).

2.1.10. Supposons que la perversité p vérifie la condition suivante : $(2.1.10.1) \text{ Si } S \subset \overline{T} \text{ , alors } p(S) \text{ } \geq p(T) \text{ .}$

Pour chaque n, la réunion \textbf{F}_n (resp. $\textbf{U}_n)$ des strates S telles que $\textbf{p}(\textbf{S}) \geq \textbf{n}$ (resp. $\textbf{p}(\textbf{S}) \leq \textbf{n})$ est alors fermée (resp. ouverte). Notons \textbf{j}_n l'inclusion de \textbf{U}_{n-1} dans \textbf{U}_n .

<u>Proposition 2.1.11. Avec les hypothèses et notations 2.1.10, soient A un faisceau p-pervers sur U_k , a un entier \geq k tel que p \leq a, et j <u>l'inclusion de U_k dans X = U_a . On a soient de verte de la communication de la communication de verte de la communication de verte de la communication de la communic</u></u>

$$j_{!*}A = \tau_{\leq a-1}j_{a*} \cdots \tau_{\leq k}j_{k+1*}A$$
.

Dans cette proposition, les $\tau_{\leq i}$ sont relatifs à la t-structure naturelle. Appliquant (2.1.7.1), on se ramène à vérifier que $(j_{k+1})_{!}*^{A=1} = \tau_{\leq k}j_{k+1}*^{A}$. Soit $F = U_{k+1} - U_{k}$. D'après 1.4.23, on a $(j_{k+1})_{!}*^{A} = U_{k+1} - U_{k}$. D'après 1.4.23, on a $(j_{k+1})_{!}*^{A} = U_{k+1} - U_{k}$. Sur F, la fonction F0 est constante, de valeur F1, et F1, F2 n'est donc autre que F3 (pour la t-structure naturelle sur F3. Puisque sur U_{k} on a F3 est dans F4 (F4) et F5. Puisque sur F6 on a F6 est dans F7 or F8 on a F9 est dans F9.

- 2.1.12. Expliquons la relation entre nos notations et celle de M. Goresky et R. Mac Pherson [4], [5].
- a) Ils travaillent en cohomologie à coefficients dans un corps R (surtout R = \mathbb{Q} , ou \mathbb{C}) , i.e. ils prennent pour \emptyset le faisceau constant de valeur R.
- b) Leurs strates sont des variétés topologiques, partout d'une même dimension, et les stratifications vérifient des conditions de trivialité locale le long de chaque strate qui assurent que pour S $\stackrel{j}{\longrightarrow}$ X une strate et F un faisceau localement constant de R-espaces vectoriels de dimension finie sur S, les restrictions à chaque strate des R^ij_*F sont encore localement constantes de dimension finie. Pour S,T deux strates avec S $\subset \overline{T}$ T , on a dim S < dim T .
- c) X a une strate ouverte dense U $_{\rm O}$ de complément de codimension dim U $_{\rm O}$ dim(X-U $_{\rm O})$ \geq 2 .
- d) La fonction de perversité ne dépend que de la dimension : on dispose de $\overline{p}:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}$ tel que $p(S)=\overline{p}(\dim S)$. La fonction \overline{p} est supposée décroissante (d'où (2.1.10.1)) et ≥ 0 , avec $p(U_{\underline{0}})=0$.

Soit j l'inclusion de U_o dans X . L'objet essentiel est l'objet $j_{!*}(R) \text{ de } D^b(X,R) \text{ . Si on en donne la description 2.1.11, on est amené à utiliser la fonction p' vérifiant encore p'(U_o) = 0 qui à chaque strate S <math display="inline">\neq$ U_o attache l'entier p(S)-l : l'opération j_{!*} consiste, partant du faisceau constant R sur U = U_o , à successivement adjoindre à U les strates S de dimension $\dim(U_o)^{-2}$, $\dim(U_o)^{-3}$, ... et à chaque fois prendre une image directe, tronquée par $\tau_{<p'(S)}$. C'est la fonc-

tion p' qu'ils appelent perversité. Du point de vue adopté ici, cela revient à décrire $^p j_{1*}$ comme étant $^p 'j_*$, et conduit à des décalages dans la description des phénomènes de dualité.

Goresky et Mac Pherson supposent aussi que la fonction \overline{p} ne décroît pas trop vite : $\overline{p}(n)$ - $\overline{p}(n+1)$ = 0 ou 1 . Le résultat 2.1.14 cidessous montre que cela fournit des indépendances de la stratification.

- 2.1.13. De 2.1.12, gardons les hypothèses suivantes :
- a) θ est le faisceau constant de valeur R, pour R un anneau noethérien à gauche.
- b) Les strates sont des variétés topologiques partout d'une même dimension. Si une strate S est dans l'adhérence d'une strate T, dim S < dim T .
- c) Pour j : S \rightarrow X une strate, le foncteur ${}^{O}j_{*}$ est de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux de R-modules. Pour F un faisceau localement constant de R-modules de type fini sur S, les $R^{i}j_{*}^{i}F$ sont encore localement constants de type fini sur chaque strate.

Pour U une réunion localement fermée de strates, notons D_G(U,R) ou $D_c(U,R)$ s'il faut préciser S - la sous-catégorie triangulée pleine de D(U,R) formée des K constructibles tels que les HⁱK soient localement constants de type fini sur chaque strate. On définit de même $D_{q}^{*}(U,R)$ (* = +,-,b). La condition c) assure que pour j : $U \hookrightarrow V$ avec U et V réunions localement fermées de strates, les foncteurs j,, j¹, j*et j* respectent ces souscatégories. En effet : le cas des foncteurs j, et j* est trivial. Dans le cas où U est réduit à une strate, le cas de j_* se déduit de la suite spectrale $R^p_{j_*}H^q_K \Rightarrow H^{p+q}_{k}R_{j_*}K$. Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de strates dont U est réunion. Si $k: S \hookrightarrow U$ est l'inclusion d'une strate ouverte dans U, et que L est défini par le triangle distingué (K,k,k*K,L), L est constructible car k,k*K l'est, et à support dans U' = U - S . L'hypothèse de récurrence s'applique à l'inclusion de U' dans X, et j.L est donc constructible. On déduit du triangle (j*K,(jk)*k*K, j*L) que j*K l'est. Enfin, le cas de j se ramène à celui où j est un plongement fermé et se déduit de celui de k_* , pour k l'inclusion de l'ouvert complémentaire : utiliser le triangle distingué (j,j!K,K,k**K).

Pour F \subset U fermé réunion de strates $\tau^F_{\leq a}$ respecte trivialement $D_{_{\bf C}}(U,R)$. La preuve de 1.4.10 montre alors que pour chaque perversité p, $\tau_{< p}$ et $\tau_{> p}$ respectent $D_{_{\bf C}}(X,R)$. Les faisceaux p-S-pervers sont les

faisceaux p-pervers dans D_C(X,R) .

Soit $\ensuremath{\mathsf{T}}$ une stratification de $\ensuremath{\mathsf{X}}$ qui raffine $\ensuremath{\mathsf{S}}$, et vérifie encore $\ensuremath{\mathsf{b}}$) et $\ensuremath{\mathsf{c}}$).

<u>Proposition</u> 2.1.14. <u>Soient</u> p <u>une perversité sur</u> S, <u>et</u> q <u>une sur</u> T. <u>Supposons que chaque fois qu'une strate</u> S <u>de</u> S <u>contient une strate</u> T <u>de</u> T, <u>on ait</u>

 $p(S) \le q(T) \le p(S) + \dim S - \dim T$.

Alors, <u>la t-structure de perversité</u> q <u>sur</u> $D_{T}(X,R)$ <u>induit sur</u> $D_{S}(X,R)$ <u>la t-structure de perversité</u> p.

Il suffit de vérifier que $D_S^{>P}(X,R) \subset D_T^{\leq q}(X,R)$ et que $D_S^{\geqslant p}(X,R) \subset D_T^{\geqslant q}(X,R)$. La première inclusion résulte aussitôt de ce que $p(S) \leq q(T)$ pour $S \supset T$. Vérifions la seconde. Soient K dans $D_S^{\geqslant p}(X,R)$, T une strate de T, et S la strate de S contenant $T: T \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} X$. Il s'agit de vérifier que $H^n(ji)^!K = 0$ pour n < q(T). On a $(ji)^!K = i!j!K$, et on sait déjà que les $H^mj!K$ sont des faisceaux localement constants sur S, nuls pour M < p(S). Soit or M < p(T) < m > 0 le faisceau d'orientation sur M < m > 0 (resp. M < m > 0) le faisceau d'orientation normale de M < m > 0 dont les faisceaux de cohomologie sont localement constants, on sait que M < m > 0 pour M < m > 0 prenant M < m > 0 pour M < m > 0 pour M < m > 0 pour M < m > 0 prenant M < m > 0 pour M < m > 0 prenant M < m > 0 pour M < m > 0 prenant M < m > 0 pour M < m > 0 po

Corollaire 2.1.15. Tout faisceau p-S-pervers est q-T-pervers et le foncteur d'inclusion est exact. Pour U localement fermé réunion de strates de S, et j : U \rightarrow X le morphisme d'inclusion, les foncteurs $q_{j_1}, q_{j}^{l}, q_{j*}, q_{j*}^{s}, q_{j_{l*}}, restreints$ aux faisceaux p-S-pervers, redonnent les foncteurs $p_{j_1}, p_{j}^{l}, p_{j*}, p_{j*}, p_{j*}, p_{j*}$.

2.1.16. Outre les conditions de 2.1.13, supposons que R est un corps commutatif et que X admet une triangulation (localement finie) telle que chaque strate S de S soit réunion de simplexes (ouverts). Par exemple : X algébrique réel muni d'une stratification de Whitney. On dispose alors de la théorie de Verdier de dualité. La dualité de Verdier est un automorphisme involutif de $D_{_{\bf C}}(X,R)$, et pour j : U \rightarrow X localement fermé réunion de strates, elle échange les foncteurs j_ et j_*, ainsi que j $^!$ et j * . Si R n'était pas supposé commutatif, elle enverrait $D_{_{\bf C}}(X,R)$ dans $D_{_{\bf C}}(X,R^{\rm Opp})$.

Pour chaque strate S, de faisceau d'orientation or, et de dimension d, la dualité de Verdier D sur S (K \longmapsto RHom(K,R \otimes or[d])) vérifie pour K dans D_c(S,R)

$$H^{i}DK = (H^{-d-i}K)^{v} \otimes or$$
.

Il est essentiel ici que les faisceaux de cohomologie de K soient localement constants de rang fini, et que R soit un corps (un anneau commutatif local artinien, par exemple $\mathbb{Z}/\lambda^n\mathbb{Z}$, ferait encore l'affaire, car ayant un module dualisant injectif, I, $(\mathbb{Z}/\lambda^n\mathbb{Z})$ dans le cas de $\mathbb{Z}/\lambda^n\mathbb{Z}$); la dualité de Verdier à prendre est K \mapsto RHom (K,Ra 1 I) pour a la projection sur un point).

Appelons perversité <u>duale</u> d'une perversité p la perversité p donnée par

$$p^{*}(S) = -p(S) - dim(S)$$
.

Ce qui précède montre que D échange $D^{\geq p}$ et $D^{\leq p^*}$ (ainsi que $D^{\leq p}$ et $D^{\geq p^*}$: on a $p=p^{**}$). Elle échange en particulier faisceaux p-pervers et p^* -pervers, et p^* H et p^* H et p^* Dour j l'inclusion d'une partie *localement fermée réunion de strates, elle échange p^* J, et p^* J, p^* J, et p^* J, avec p^* J, avec p^* J, et p^* J, avec p^* J, et p^* J, et p^* J, avec p^* J, et p^* J, et p^* J, et p^* J, avec p^* J, et p^* J

Dans $D_{_{\mathbf{C}}}(X,R)$, les conditions qui définissent les faisceaux p-pervers peuvent se récrire : pour toute strate j : S \to X , on a

$$H^{i}j^{*}K = 0$$
 pour $i > p(S)$ et
 $H^{i}j^{*}DK = 0$ pour $i > p^{*}(S)$

Si toutes les strates sont de dimension paire, il existe une perversité autoduale : celle donnée par

$$p_{1/2}(S) = -\frac{1}{2} \dim S$$
.

Proposition 2.1.17. Sous les hypothèses 2.1.16, si toutes les strates sont de dimension paire et pour la perversité autoduale p_{1/2}, si j: U \rightarrow X est un ouvert de X réunion de strates et que A est un faisceau pervers autodual sur U, alors j_{!*}A est l'unique prolongement autodual P de A (dans D_C(X,R)) tel que, pour chaque strate S \subset X-U, les HⁱP soient nuls sur S pour i \geq - $\frac{1}{2}$ dim (S).

Que ${\rm j}_{1*}{\rm A}$ soit autodual résulte de l'autodualité de A, et de celle de ${\rm j}_{1*}$. Ceci observé, la proposition est une application immédiate de 2.1.9 et 2.1.16.

Remarque 2.1.18. Si U est orientable et lisse purement de dimension d, on peut prendre pour A le faisceau constant R, placé en degré -d/2. Pour ce choix $j_{|*}A$ est le"complexe d'intersection" noté IC' dans l'introduction, et 2.1.17 est la caractérisation de Verdier de IC' .

2.1.19. Soient (X,S,θ) comme en 2.1.1, θ° le faisceau d'anneaux opposé de θ et p,q deux perversités. La proposition suivante donne le comportement, vis-à-vis des perversités, des foncteurs

Si θ est commutatif, on peut bien sûr remplacer $\mathbb Z$ par θ .

La première assertion est claire, \otimes se calculant point par point. Elle est énoncée par souci de symétrie.

Soient K dans K^{$\leq p$} et L dans D^{$\geq q$}. Un argument de dévissage ramène à supposer que K est la forme j_!A[-n], pour A un faisceau sur une strate S, j l'inclusion de S dans X et n < p(S) . On a alors

$$R \underline{\text{Hom}}(j_A[-n],L) = j_* R \underline{\text{Hom}}(A[-n],j^!L) .$$

Par hypothèse, j[!]L est dans $D^{\geqslant q(S)}(S, \emptyset)$. Le RHom est dans $D^{\geqslant q(S)-n}(S, \mathbb{Z}) \subset D^{\geqslant q(S)-p(S)}(S, \mathbb{Z})$, et la t-exactitude à gauche (pour toute perversité) de j* montre enfin que RHom(j!A[-n],L) est dans $D^{\geqslant q-p}$.

Faisant p = q, on trouve:

Corollaire 2.1.21. Pour K dans $D^{\triangleleft p}(X, 0)$ et L dans $D^{\geqslant p}(X, 0)$, on a $H^{i}RHom(K,L) = 0$ pour i < 0.

Ce corollaire peut aussi se déduire, par localisation, de ce que Hom(K,L[i]) = O pour i < O (2.1.4).

Les $H^{1}R\underline{Hom}(K,L)$ étant nuls pour i < 0, la suite spectrale du local au global fournit en effet

$$\operatorname{Hom}_{D(U,O)}(K|U,L|U) = \operatorname{H}^{O}(U,\operatorname{H}^{O}\operatorname{R}\operatorname{\underline{Hom}}(K,L))$$
.

Munissons chaque ouvert U de X de la stratification induite par S, et de la perversité induite par p. La restriction à U d'un faisceau p-pervers sur X est alors un faisceau p-pervers sur U. On a

<u>Preuve</u> (Utilisant 3.2 ; une variante est prouvée, indépendamment de 3.2 , en 2.2.19).

D'après 2.1.22, les faisceaux p-pervers forment un préchamp : les morphismes se recollent. Pour recoller les objets, on utilise 3.2.4, dont 2.1.21 assure que les hypothèses sont vérifiées.

2.1.24. <u>Variante</u>. Plutôt que de prendre pour X un espace topologique stratifié, on eut pu aussi bien prendre pour X un topos stratifié. Un cas important est celui où X est le topos étale d'un schéma S, muni d'une stratification.

2.2.Schémas.

2.2.1. A titre de modèle, considérons d'abord le cas d'une variété algébrique complexe. Il s'agit d'appliquer 2.1 au cas suivant :

 $\underline{\text{Espace}} : \texttt{L'ensemble X(C)} \text{ des points complexes d'un schéma séparé de type fini sur C, muni de sa topologie usuelle.}$

pour
$$n < m$$
, $0 < p(n) - p(m) < m-n$.

<u>Stratifications</u>: Rappelons que toute stratification (algébrique) de X admet un raffinement qui est de Whitney (voir J.L. Verdier, stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard - Inv . Math. $\underline{36}$ (1976) 295-312). Les stratifications utilisées seront les stratifications de Whitney (algébriques) à strates équidimensionnelles de X . Elles vérifient les conditions (a)(b)(c) de 2.1.13, qui seules nous importent. Dans la discussion, sur C , qui suit, nous les appelerons simplement stratifications. Pour chaque stratification S, la perversité $p_{\rm Q}$ de S est définie par

$$p_S(S) = p(2dim_{alg}S) = p(dim_{top}S)$$
.

On écrira simplement dim S pour la dimension algébrique $\dim_{alg} S$ de S.

Soit R un anneau noethérien à gauche. La <u>catégorie dérivée constructible</u> $D_{\mathbf{C}}(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ est la sous-catégorie pleine de $D(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ formée des complexes K tels que les faisceaux $\mathbf{H}^i\mathbf{K}$ soient constructibles. La catégorie $D_{\mathbf{C}}^b(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R}) = D^b(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ n $D_{\mathbf{C}}(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ est la réunion (fil-trante) des sous-catégories $D_{\mathbf{S}}^b(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ de $D(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$. Sur chaque $D_{\mathbf{S}}^b(\mathbf{X}(\mathbf{C}),\mathbf{R})$ la perversité $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}$ définit une t-structure. D'après 2.1.14 et l'hypothèse faite sur p , pour S de plus en plus fine, ces t-structures s'induisent les unes les autres. Par passage à la limite, elles fournissent la t-structure de perversité p

 $(D_C^b, \stackrel{>}{\preceq}^p(X(\mathbb{C}), R), D_C^b, \stackrel{>}{\succeq}^p(X(\mathbb{C}), R)) \text{ sur } D_C^b(X(\mathbb{C}), R). \text{ A l'imitation de 2.1.4, on en déduit une t-structure sur } D_C(X(\mathbb{C}), R): \text{ si pour } 0 \leq i \leq \dim X, a \leq p(2i) \leq b,$ on définit $D_C^{\leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ (resp. $D_C^{\geq p}(X(\mathbb{C}), R)$) comme la sous-catégorie de

 $D_{C}^{-}(X(\mathbf{C}),R) \text{ formée des } K \text{ tels que } \mathcal{H}^{\dot{\mathbf{L}}}K = 0 \text{ pour } i > b \text{ (resp. } i < a) \text{ etque } \mathbf{C}^{\dot{\mathbf{L}}}_{c} \times \mathbf{C}^{\dot{\mathbf{L}}}(X(\mathbf{C}),R) \text{ (resp. } \mathbf{D}^{\dot{\mathbf{L}}}_{c} \times \mathbf{C}^{\dot{\mathbf{L}}}(X(\mathbf{C}),R)).$

Pour $S \subseteq X$, posons p(S) = p(2 dim S).

<u>Proposition 2.2.2.Soit K dans $D_{C}(X(C),R)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.</u>

- (i) K est dans $D_{C}^{\leq p}(X(\mathbb{C}),\mathbb{R})$ (resp. $D_{C}^{\geq p}(X(\mathbb{C}),\mathbb{R})$).
- (ii) Toute sous-variété irréductible S' de X a un ouvert de Zariski dense S tel que, notant i l'inclusion de S(C) dans X(C), on ait $H^{i}i^{*}K = 0$ pour i > p(S) (resp. $H^{i}i^{!}K = 0$ pour i < p(S)).
- (iii) Pour tout S dans T, $H^{i}i_{S}^{*}K = 0$ pour i > p(S) (resp. $H^{i}i_{S}^{!}K = 0$ pour i < p(S)).

Supposons d'abord K dans D_{C}^{b} . Pour toute stratification S assez fine, K est alors dans D_{S}^{b} . En particulier, il existe T ayant les propriétés imposées, et il suffit de voir que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii). L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est triviale. Pour vérifier que (i) \Rightarrow (ii), il suffit de prendre S assez fin pour que K soit dans D_{S}^{b} (donc dans D_{S}^{b}) et que S' soit une adhérence de strate. Prouvons (iii) \Rightarrow (i). Soit S plus fin que T tel que K soit dans D_{S}^{b} . L'hypothèse sur p et la preuve de 2.1.4. montrent que K est dans D_{S}^{b} . (resp. D_{S}^{c}), d'où (i).

Dans le cas général, soient a et b tels que a $\leq p(2i) \leq b$ pour $0 \leq i \leq \dim X$ Si dans (i), (ii) ou (iii) on remplace K par $\tau_{\geqslant a} K$ (resp. $\tau_{\leqslant b} K$), on obtient une condition équivalente et il reste à montrer que chacune implique que $H^iK=0$ pour i>b (resp. i<a). Pour (i), c'est dans la définition. Pour (ii) et (iii), on reprend la preuve de (2.1.2.1) qui suit 2.1.2. Pour (iii), on commence par remplacer T par une stratification plus fine. Pour (ii), on prouve par récurrence descendante sur dim S' que pour chaque sous-variété irréductible S' et chaque i>b (resp. i<a), il existe un ouvert dense S de S' tel que H^iK soit nul sur S.

2.2.3. Si U est une partie localement fermée de X, pour toute stratification assez fine , U est réunion de strates. Ceci permet d'appli-

quer 2.1.6 (propriétés d'exactitude de j $_1$, j 1 , j * et j $_*$) à l'inclusion j de U dans X . On utilisera les notations $\tau_{\leq p}$, H p , p j $_1$,... de 2.1.7, dont les résultats restent valables. Pour U un ouvert (de Zariski) de X, de fermé complémentaire F, la t-structure de perversité p de $^{\rm D}_{\rm C}$ (X(${\bf T}$),R) s'obtient par recollement à partir de celles de $^{\rm D}_{\rm C}$ (U(${\bf T}$),R) et $^{\rm D}_{\rm C}$ (F(${\bf T}$),R). Le formalisme 1.4 est donc appliquable, comme en 2.1.8.

En particulier, pour A p-pervers sur U, on (1.4.23)

$$(2.2.3.1)$$
 $j_{!*}A = p_{\tau_{<-1}}^F j_*A$.

Supposons F de dimension \leq d et posons t = p(2d). Puisque $\tau_{<t}i^*j_*A$ est dans $^pD_c^{<0}$ et que le triangle $(\tau_{<t}i^*j_*A,A,\tau_{>t}i^*j_*A)$ est distingué, si $\tau_{>t}i^*j_*A$ est dans $^pD_c^{>0}$, on a $^p\tau_{<0}i^*j_*A \xrightarrow{} \tau_{<t}i^*j_*A$ et donc $^p\tau_{<0}j_*A \xrightarrow{} \tau_{<t}i^*j_*A$ et donc $^p\tau_{<0}j_*A \xrightarrow{} \tau_{<t}i^*j_*A$. En particulier (par 2.2.2 (iii) appliqué à F et à $^pT_{<0}j_*A \xrightarrow{} \tau_{<t}i^*j_*A$.

Proposition 2.2.4 . Si F est lisse de dimension d et que les $\#^i j_*A$ sont localement constants sur F pour $i \ge t := p(2d)$, on a

$$(2.2.4.1)$$
 $j_{!*}A = \tau_{\leq t-1}^{F} j_{*}A$.

Ceci, joint à la transitivité de j $_{!*}$, est analogue à 2.1.11. De même, sous la même hypothèse sur F et si la locale constance de $\text{H}^{\dot{1}}$ i * j $_*$ A vaut pour i \geq t-1, (resp. t+1), on a respectivement, par 1.4.23,

(2.2.4.2)
$$p_{j_!}A = \tau_{\leq t-2}^F j_*A$$
;

$$(2.2.4.3)$$
 $p_{j_*A} = \tau_{\leq t}^F j_*A$.

Pour K dans D_C, la condition K \in D_C équivaut aux bornes p(2 dim Supp $\text{H}^{\dot{1}}\text{K})$ \geq i

sur la dimension des supports des H^iK . Le foncteur $^Of_!$ étant exact, on a $H^if_!K = ^Of_!H^iK$, d'où Supp $H^if_!K = f(Supp H^iK)^-$ et dim Supp $H^if_!K = dim Supp H^iK$. De même, $H^if_!K = ^Of_!H^iK$, Supp $H^if_!K = f_!^*K$ et dim Supp $H^if_!K \le dim Supp H^iK$. Ceci prouve la t-exactitude à droite de $f_!$ et f_* . La t-exactitude à gauche de $f_!^!$ et f_* peut s'en déduire par adjonction (1.3.17 (iii)).

 $\frac{\text{Remarque}}{\text{soient définies en terme de la dimension - et non de la codimension-des strates (si X et Y ne sont pas de la même dimension).}$

Corollaire 2.2.6 (i) $\frac{\text{Si}}{\text{s}}$ f est fini, $f_1 = f_*$ est t-exact.

(ii) Si f est étale, f = f est t-exact.

2.2.7. Pour f quasi-fini et F p-pervers sur X, f_!F est dans $^{p}D^{\leq 0}$ et f_*F dans $^{p}D^{>0}$. Le morphisme naturel de f_!F dans f_*F admet donc une factorisation

$$\begin{array}{ll} \text{(2.2.7.1)} & \text{f}_! \text{F} \rightarrow \text{}^p \text{f}_! \text{F} \rightarrow \text{}^p \text{f}_* \text{F} \rightarrow \text{f}_* \text{F} \\ \text{On pose} \\ & \text{f}_{!*} \text{F} = \text{Im}(\text{}^p \text{f}_! \text{F} \rightarrow \text{}^p \text{f}_* \text{F}) \end{array} .$$

2.2.8. Comme en 2.1.20, si les perversités p,q vérifient pour n \leq m,

$$(p+q)(n) - (p+q)(m) \le m - n$$
,

Leavoie $D_{C}^{-,\leq p}\times D_{C}^{-,\leq q}$ dans $D_{C}^{\leqslant p+q}$, et si q-p est décroissante, RHome envoie $D_{C}^{-,\leq p}\times D_{C}^{+,\geq q}$ dans $D_{C}^{+,\geq (q-p)}$. En particulier, pour K dans $D_{C}^{\leqslant p}$ et L dans $D_{C}^{\geqslant p}$, les $\underline{H}^{\dot{1}}$ RHom(K,L) sont nuls pour i < 0, et $U\longmapsto Hom_{D(U)}(K|U,L|U)$ est un faisceau. Comme en 2.1.23, les faisceaux p-pervers forment un champ.

Si R est un corps commutatif, la dualité de Verdier échange D^p et D^p, D^p et D^p, faisceaux p-pervers et p-pervers (cf.2.1.16), et p H et p H et D^p.

- 2.2.9. Soit X un schéma de type fini sur un corps k, et soit ℓ un nombre premier, premier à la caractéristique de k. Sur X, nous considérerons exclusivement la topologie étale. Notre but est la définition des Φ_{ℓ} -faisceaux pervers sur X. Le cas des faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules étant un peu plus facile, nous commençons par lui.
- 2.2.10. A cause des phénomènes de ramification sauvage, on ne dispose plus de stratifications jouant le rôle des stratifications de Whitney. Nous aurons à considérer des paires $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ où
- (a) S est une partition finie de X en parties localement fermées (appelées strates). L'adhérence d'une strate est réunion de strates, et sur \overline{k} chaque strate réduite est lisse, partout de la même dimension.
- (b) L est la donnée, pour chaque strate S, d'un ensemble $\underline{\text{fini}}\ L(S)$ de classes d'isomorphie de faisceaux localement constants de \mathbb{Z}/ℓ -modules

sur S, irréductibles dans la catégorie de tous les faisceaux localement constants de $\mathbb{Z}/\mbox{\ensuremath{\upkeps}{ℓ}}$ -modules.

Un faisceau de \mathbb{Z}/ℓ -modules sera dit (S,L)-constructible si sa restriction à chaque strate S est localement constante et extension itérée (finie) de faisceaux dont la classe d'isomorphie est dans L(S). On note $D_{S,L}^b(X,\mathbb{Z}/\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X,\mathbb{Z}/\ell)$ formée des complexes (S,L)-constructibles, i.e. tels que les H^1K soient (S,L)-constructibles. On dit que (S',L') raffine (S,L) si chaque strate S de S est réunion de strates de S', et que les F dans L(S) sont (S',L')-constructibles (i.e. (S'|S,L'|(S'|S)) constructibles).

On impose enfin

(c) Pour S dans S et F dans L(S), si j est l'inclusion de S dans X, les $\mathbb{R}^n j_* F$ sont (S, L)-constructibles.

Cette condition assure comme en 2.1.13 que pour $U \overset{\cdot}{\longleftrightarrow} V \subset X$ localement fermés et réunions de strates, les foncteurs j_* , $j_!$, $j^!$ envoient l'un dans l'autre $D^b_{S,l}(U,\mathbb{Z}/\ell)$ et $D^b_{S,l}(V,\mathbb{Z}/\ell)$.

Il résulte du théorème de constructibilité pour Rj_* ([3]1.1.) que pour tout système (S',L') vérifiant (a) (b), il existe (S,L) raffinant (S',L') qui vérifie (a) (b) (c) : si (a) (b) (c) sont vrais pour X remplacé par la réunion des strates de dimension \geq n, le théorème de constructibilité permet de raffiner (S,L) en (S',L'), sans toucher aux strates de dimension \geq n, et de rendre (a) (b) (c) vrais pour X remplacé par la réunion des strates de dimension \geq n-1 . On itère cette construction.

2.2.11. Soit p comme dans 2.2.1, définissant les fonctions de perversité $p_S: S \to \mathbb{Z}: S \longmapsto p(2 \text{ dim } S)$. Procédant comme précédemment, on déduit de p une t-structure sur $D_{S,L}^b(X,\mathbb{Z}/\ell)$.Pour (S,L) de plus en plus fin, ces t-structures s'induisent les unes les autres : le théorème de pureté SGA 4 XVI 3.7 fournit l'analogue de 2.1.14. Par passage à la limite on obtient une t-structure $(D_c^{b, \leq p}(X,\mathbb{Z}/\ell), D_c^{b, \geq p}(X,\mathbb{Z}/\ell))$ sur la réunion filtrante $D_c^b(X,\mathbb{Z}/\ell)$ des $D_{S,L}^b(X,\mathbb{Z}/\ell)$. On en déduit une t-structure sur $D_c(X,\mathbb{Z}/\ell)$ comme en 2.2.1, et 2.2.2 à 2.2.8 restent valables, avec essentiellement la même démonstration. Le formalisme de dualité en cohomologie étale (SGA 4 XVIII) remplace celui de la dualité de Verdier.

2.2.12. Pour x un point (fermé ou non) de X, si i_x est l'inclusion de x dans X, factorisée en x \xrightarrow{j} $\{x\}^- \xrightarrow{i}$ X, on définit $i_x^! := j^*i^!$. Avec

cette notation, la caractérisation 2.2.2(ii) de $D_{\overline{c}}^{\leq p}$ (resp. $D_{\overline{c}}^{\geq p}$) admet la formulation plus élégante suivante.

(ii) Pour tout point (fermé ou non) x de X, notant dim x la dimension de $\{x\}^-$, on a $H^ii_x^*K=0$ pour $i< p(2\dim x)$ (resp. $H^ii_x^!K=0$ pour $i> p(2\dim x)$).

2.2.13. Pour les faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules (ou plus généralement de R-modules, avec R fini sur \mathbb{Z}/ℓ^n), on procède de même. Il est commode de continuer à prendre pour L la donnée, pour chaque strate, d'une famille finie de faisceaux localement constants irréductibles de \mathbb{Z}/ℓ -modules, et de dire que K dans $\mathbb{D}^b(X,R)$ est (S,L)-constructible si les ℓ^i ℓ^i

2.2.14. Pour les $\mathbb{Z}_{\hat{\ell}}$ -faisceaux, (resp. $\mathbb{Q}_{\hat{\ell}}$ -faisceaux,...) on procède de même, une fois définies des catégories triangulées $D_{\mathbf{C}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\hat{\ell}})$ (resp. $D_{\mathbf{C}}^{b}(X,\mathbb{Q}_{\hat{\ell}})$,...) obéissant au formalisme de variance habituel, et une fois définie leur t-structure "naturelle", dont on veut qu'elle fournisse la catégorie abélienne des $\mathbb{Z}_{\hat{\ell}}$ -faisceaux (resp. $\mathbb{Q}_{\hat{\ell}}$ -faisceaux,..) constructibles sur X (SGA 5 VII 1.1.). Dans le cas des corps de base finis ou algébriquement clos (ou plus généralement lorsque pour toute extension finie k' de k les groupes $H^{\hat{\mathbf{I}}}$ (Gal (\overline{k}/k')), \mathbb{Z}/ℓ) sont finis), une solution est proposée dans [1] 1.1.2: poser

$$(2.2.14.1) \quad D_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, \, \mathbb{Z}_{\mathbf{k}}) \; := \; 2\text{-lim proj } D_{\mathbf{ctf}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, \, \mathbb{Z}/\mathbf{k}^{\mathbf{n}})$$

(ctf pour "constructible de Tor-dimension finie"). On prend pour foncteurs de transition les foncteurs d'extension de scalaires

la restriction aux objets de Tor-dimension finie est nécessaire pour qu'ils envoient $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}$ dans $\mathbf{D}^{\mathbf{b}}$.

La proposition suivante, jointe aux théorèmes de finitude de [3] assure que l'on obtient bien une catégorie triangulée.

 $\begin{array}{c} \underline{\text{Proposition}} & 2.2.15. & \underline{\text{Soit}} & (\textit{\mathcal{V}}_n)_{n \in \mathbb{N}} & \underline{\text{un système projectif de catégories}} \\ \underline{\text{triangulées. Les foncteurs de transition}} & \mathbf{T}_{\text{m,n}} : \; \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_{\text{m}} & \underline{\text{sont supposés}} \\ \underline{\text{exacts. Si, pour tout n } \in \mathbb{N} & \underline{\text{et K, L dans}} & \textit{\mathcal{V}}_n & \underline{\text{Hom}(\text{K,L})} & \underline{\text{est fini}}, \\ \underline{\text{alors la 2-limite projective}} & \textit{\mathcal{V}} & \underline{\text{de}} & \textit{\mathcal{V}}_n & \underline{\text{munie de la famille des triangles}} \\ \underline{\text{T d'images distinguées dans les}} & \mathcal{V}_n & \underline{\text{est triangulée}}. \\ \end{array}$

Soit u : X \rightarrow Y dans $\mathcal D$, et u_m : X_n \rightarrow Y_n son image dans $\mathcal D_n$. Pour

vérifier que u est la base d'un triangle distingué T (TR1) on choisit pour chaque n un triangle distingué \mathbf{T}_n de base \mathbf{u}_n . Appliquant TR3 dans les \mathcal{V}_n , on construit des morphismes $\mathbf{T}_{n,n+1}(\mathbf{T}_{n+1}) \to \mathbf{T}_n$ de base l'automorphisme identique de \mathbf{u}_n . Ce sont des isomorphismes. Ils permettent de définir le T requis comme limite projective des \mathbf{T}_n .

Soit dans $\mathcal V$ deux triangles distingués T,T' et $f:base(T) \to base(T')$

$$\begin{array}{cccc}
x & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{y} & \longrightarrow & \mathbf{z} & \xrightarrow{(1)} \\
f_{\mathbf{x}} \downarrow & f_{\mathbf{y}} \downarrow \\
x' & \longrightarrow & \mathbf{y}' & \longrightarrow & \mathbf{z}' & \xrightarrow{(1)}
\end{array}$$

Pour chaque n , soient T_n , T_n' et f_n les images de T, T', f dans \mathcal{D}_n , et H_n l'ensemble des morphismes de triangles $T_n \to T_n'$ qui induisent f_n . Le foncteur $T_{n,n+1}$ envoie H_{n+1} dans H_n , et la limite projective H_n des H_n est l'ensemble des k: $T \to T'$ induisant f. Chaque H_n est fini par hypothèse, et non vide d'après TR3 dans \mathcal{D}_n . On a donc $H \neq \emptyset$, et ceci vérifie TR3 dans \mathcal{D} . La vérification de TR4 dans \mathcal{D} est semblable. Celle de TR2 est triviale.

2.2.16. La définition (2.2.14.1) a ceci de bon que le formalisme de variance des $D_{\mathbf{C}}^b(X, \mathbb{Z}_{\chi})$ s'obtient par simple passage à la limite. La définition de la t-structure naturelle est plus délicate, car les $\tau_{\leq i}$ dans $D_{\mathbf{C}}^b(X, \mathbb{Z}/{\ell}^n)$ ne respectent pas la Tor-dimension finie et ne commutent pas aux extensions de scalaires. On définit le foncteur H^i de $D_{\mathbf{C}}^b(X, \mathbb{Z}_{\ell})$ dans la catégorie abélienne des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux constructibles en attachant à K, défini par un système de $K_n \in D_{\mathbf{C}}^b(X, \mathbb{Z}/{\ell}^n)$, le \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceau limite projective des $H^i(K_n)$. Nous écrirons $K \otimes \mathbb{Z}/{\ell}^n$ pour K_n . On dispose des suites exactes usuelles

$$(2.2.16.1) \quad \text{O} \rightarrow \text{H}^{\overset{1}{\text{l}}}(\text{K}) \otimes \mathbb{Z}/\text{ℓ}^{\overset{n}{\text{l}}} \rightarrow \text{H}^{\overset{1}{\text{l}}}(\text{K} \otimes \mathbb{Z}/\text{ℓ}^{\overset{n}{\text{l}}}) \rightarrow \text{Tor}_{\overset{1}{\text{l}}}(\text{H}^{\overset{1}{\text{l}}+1}(\text{K}),\mathbb{Z}/\text{ℓ}^{\overset{n}{\text{l}}}) \rightarrow \text{O} .$$

Pour n variable, elles forment un système projectif, et le système projectif des Tor $_1$ est essentiellement nul. On définit $\mathsf{D}^b_{\mathbf{C}}(\mathsf{X},\,\mathbb{Z}_{\underline{\ell}})^{\leq O}$ (resp. $\mathsf{D}^b_{\mathbf{C}}(\mathsf{X},\,\mathbb{Z}_{\underline{\ell}})^{\geq O}$) par les conditions $\mathsf{H}^{\mathbf{i}}\mathsf{K}$ = 0 pour i > 0 (resp. i < 0). Pour s'assurer qu'on obtient bien une t-structure, l'essentiel est la construction des opérateurs $\tau_{\leq \mathbf{i}}$. Elle est faite dans [1] l.1.2. Le foncteur H^O induit une équivalence de catégories $(\mathsf{D}^b_{\mathbf{C}}(\mathsf{X},\,\mathbb{Z}_{\underline{\ell}})^{\leq O}\cap\mathsf{D}^b_{\mathbf{C}}(\mathsf{X},\,\mathbb{Z}_{\underline{\ell}})^{\geq O})$ \rightarrow ($\mathbb{Z}_{\underline{\ell}}$ -faisceaux constructibles).

Les suites exactes (2.2.16.1) montrent que pour que K soit dans $D_{\mathbf{C}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\underline{\ell}})^{\leq 0}$, il faut et il suffit que pour un (tout) n, K $\underset{\mathbb{Z}_{\underline{\ell}}}{\otimes}\,\mathbb{Z}/\ell^{n}$

soit dans $D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \stackrel{\leq 0}{-}$.

Une bonne définition, inconditionnelle, de $D_{\mathbf{c}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\ell})$ a été proposée par O. Gabber. Notons $\hat{D}_{\mathbf{c}}(X,\,\mathbb{Z}_{\ell})$ la catégorie triangulée qu'elle fournit. On dispose d'un foncteur conservatif $\hat{D}_{\mathbf{c}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\ell}) \to D_{\mathbf{c}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\ell})$, bijectif sur l'ensemble des classes d'isomorphie. Pour K, L dans $\hat{D}_{\mathbf{c}}^{b}(X,\,\mathbb{Z}_{\ell})$, de réduction mod ℓ^{n} K_n et L_n, on a une suite exacte courte

$$O \rightarrow \lim^{1} Hom(K_{n}, L_{n}) \rightarrow Hom(K, L) \rightarrow \lim Hom(K_{n}, L_{n}) \rightarrow O$$
.

Pour X le spectre d'un corps k, de clôture séparable \overline{k} , V un \mathbb{Z}_{ℓ} -module de type fini sur lequel $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ agit continûment, et K (resp. L) réduit à \mathbb{Z}_{ℓ} (resp. V) en degré O, les $\operatorname{Hom}^i(\mathbb{Z}_{\ell},V)$, dans $\hat{\mathbb{D}}_{\mathbf{C}}^b$, sont les $\operatorname{H}^i(\operatorname{Gal}(\overline{k}/k),V)$, tels que calculés par le complexe des cochaînes continues. Comme il n'a pas rédigé sa définition, nous sommes obligés de nous limiter au cadre un peu étriqué où 2.2.15 s'applique.

2.2.17. Soit $D_{S,L}^b(X,\mathbb{Z}_\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D_C^b(X,\mathbb{Z}_\ell)$ formée des K vérifiant les conditions suivantes, dont l'équivalence résulte de (2.2.16.1) : (a) pour tout (resp. un) n, K @ \mathbb{Z}/ℓ^n est dans \mathbb{Z}_ℓ \mathbb{Z}_ℓ (X, \mathbb{Z}/ℓ^n) ; (b) les \mathbb{H}^1 K @ \mathbb{Z}/ℓ sont (S,l)-constructibles. Pour (S,l) variable, \mathbb{D}_C^b est la réunion filtrante des $\mathbb{D}_{S,L}^b$, et on définit la t-structure de perversité p sur \mathbb{D}_C^b par passage à la limite sur (S,l), comme en 2.2.10, à partir de t-structures sur les $\mathbb{D}_{S,L}^b$ obtenues par recollement.

Comme en 2.2.16, pour que K soit dans ${}^pD_{\overline{c}}^{< O}(X, \mathbb{Z}_{\ell})$, il faut et il suffit que sa réduction mod ℓ soit dans ${}^pD_{\overline{c}}^{< O}(X, \mathbb{Z}/\ell)$.

2.2.18. Rappelons que, par définition,

$$D_{\mathbf{C}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\ell}) := D_{\mathbf{C}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_{\ell}) \underset{\mathbf{Z}_{b}}{\otimes} \mathbf{Q}_{\ell} ,$$

et que la catégorie abélienne des \mathbb{Q}_{ℓ} -faisceaux constructibles est le $\mathbb{Q}_{\ell}^{\infty}$ de celle des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux constructibles. La sous-catégorie pleine $\mathrm{D}_{S,L}^{b}(X,\mathbb{Q}_{\ell})$ image de $\mathrm{D}_{S,L}^{b}(X,\mathbb{Z}_{\ell}) \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$ est formée des K tels que chaque $\mathrm{H}^{i}\mathrm{K}$ est le $\mathbb{Q}_{\ell}^{\otimes}$ d'un \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceau (S,L)-constructible, i.e. de réduction $\mathrm{mod} \ell$ (S,L)-constructible. On définit la t-structure de perversité p sur $\mathrm{D}_{\mathrm{C}}^{b}(X,\mathbb{Q}_{\ell})$ par passage à la limite sur (S,ℓ) et recollement, comme précédemment. Pour tout intervalle [a,b], le foncteur naturel

$$p_{D_{\mathbf{C}}^{[a,b]}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_{\lambda}) \otimes \mathbf{Q}_{\lambda} \rightarrow p_{D_{\mathbf{C}}^{[a,b]}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\lambda})$$

est une équivalence. En particulier (a = b = 0), la catégorie abélien-

ne des \mathbb{Q}_{ℓ} -faisceaux pervers se déduit de celle des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux pervers par \mathbb{Q}_{ℓ} .

Soient E_{λ} une extension finie de Q_{ℓ} et θ_{λ} son anneau de valuation. On peut traiter des θ_{λ} -faisceaux comme on a traité des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux, et passer de là aux E_{λ} -faisceaux par $\underset{\ell}{\otimes} E_{\lambda}$. On peut aussi passer des Q_{ℓ} -faisceaux aux E_{λ} -faisceaux en observant que le foncteur d'oubli ω induit une équivalence

La pleine fidélité résulte de la suite spectrale

$$(2.2.18.1) \quad \text{E}_2^{\text{Pq}} = \text{Ext}_{\text{E}_\lambda}^{\text{P}} \otimes \text{E}_\lambda \quad (\text{E}_\lambda, \text{Hom}^{\text{q}}(\omega \text{K}, \omega \text{L})) \Rightarrow \text{Hom}(\text{K}, \text{L}) \quad ,$$

où $\text{E}_2^{pq}=\text{O}$ si $p\neq \text{O}$ (le produit tensoriel $\text{E}_\lambda \otimes \text{E}_\lambda$ est pris sur \mathfrak{Q}_ℓ , et le Hom^q dans $\text{D}_{\mathbf{C}}^b(\text{X},\mathfrak{Q}_\ell)$). La surjectivité essentielle résulte de ce que K, muni d'une action de E_λ , est facteur direct de K \otimes E_λ . \mathfrak{Q}_a

La suite spectrale (2.2.18.1) se déduit d'une suite spectrale analogue pour $\text{D}_{\text{C}}^{b}(X, \theta_{\lambda})$, obtenue par passage à la limite. Si θ_{λ} est étale sur $\mathbb{Z}_{\bar{\lambda}}$, on a encore E_{2}^{pq} = 0 pour p \neq 0 , mais non en général. La suite spectrale montre toutefois que le foncteur d'oubli induit un foncteur pleinement fidèle

Nous n'avons pas vérifié que c'est, comme il se doit, une équivalence.

On passe enfin à $D_{\mathbf{C}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X},\overline{\mathbf{Q}}_{\ell})$ par passage à la limite (inductive) sur $\mathbf{E}_{\lambda}\subset\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$.

2.2.19. Les résultats 2.2.2 à 2.2.8 et 2.2.12 continuent à s'appliquer dans tous ces contextes, avec essentiellement la même démonstration.

La preuve 2.1.23 de ce que les faisceaux pervers forment un champ ne s'applique toutefois plus telle quelle, car 3.2, sur laquelle elle repose a été rédigé en supposant que l'on travaillait à l'intérieur d'une catégorie dérivée d'une catégorie de faisceaux. Voici une autre preuve. On sait déjà, comme en 2.1.23, que les morphismes se recollent, et il s'agit de prouver que si $(\mathrm{U}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{I}}$ est un recouvrement étale fini de X, toute famille A, de faisceaux

pervers sur les U_i munie d'une donnée de recollement provient de A pervers sur X. La donnée de recollement permet, pour chaque j : V \rightarrow X étale, et se factorisant par un U_i , de définir A_V faisceau pervers sur V, et ce de façon compatible aux images inverses V' \rightarrow V .

Pour tout morphisme f : Y \rightarrow X et toute sous-variété irréductible localement fermée i : S' \longleftrightarrow X de X, donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
T' & \xrightarrow{i} & Y \\
f & & f \\
S' & \xrightarrow{i} & X
\end{array}$$

on a dans la catégorie dérivée i $^!f_*=f_*i^!$. Si f est quasi-fini, S' admet un ouvert dense S tel que T = $f^{-1}S$ soit fini sur S , et vide ou purement de dimension $\dim(S)$. Il en résulte que f_* envoie alors $\mathsf{D}_C^{>p}(Y,\mathbb{Q}_{\ell}) \text{ dans } \mathsf{D}_C^{>p}(X,\mathbb{Q}_{\ell}) : {}^pf_* := \mathsf{H}^Of_*\varepsilon \text{ est un foncteur exact à gauche des faisceaux pervers sur Y dans les faisceaux pervers sur X, ayant <math display="block">{}^pf^* := \mathsf{H}^Of^*_\varepsilon \text{ pour adjoint à gauche } (1.3.17 \text{ (iii)}) \ .$

Soit j_ (resp. j_{ij}) la projection sur X de U_ (resp. de U_ i := U_i $\times_X U_j$) . Posons

$$\mathbf{A} := \operatorname{Ker} (\prod_{\mathbf{I}} {^{\mathbf{p}}} \mathbf{j}_{\mathbf{i} *} \mathbf{A}_{\mathbf{U}_{\mathbf{i}}} \Longrightarrow \prod_{\mathbf{I} \times \mathbf{I}} {^{\mathbf{p}}} \mathbf{j}_{\mathbf{i} \mathbf{j} *} \mathbf{A}_{\mathbf{U}_{\mathbf{i} \mathbf{j}}}) .$$

Il suffit de voir que le morphisme ${}^p j_i^* A \longrightarrow A_i = A_{U_i}$ déduit par adjonction de $A \longrightarrow j_i * A_{U_i}$ est un isomorphisme. Il suffit de le voir après tout changement de base j_j . Les images directes et réciproques considérées commutant à une telle localisation, nous sommes ramenés au cas où l'un des U_j/X admet une section. Dans ce cas, les A_i sont les images inverses d'un A_X , et que $A = A_X$ résulte de l'argument habituel d'homotopie qui montre que deux recouvrements ouverts dont chacun est plus fin que l'autre donnent la même cohomologie de Čech.

3. COMPLÉMENTS.

3.1. <u>Catégories dérivées filtrées, filtrations canoniques, et filtrations bêtes.</u>

3.1.1. Les catégories triangulées usuelles ont les accompagnant une "catégorie dérivée filtrée". Les relations entre la catégorie trianquiée de départ et celle-ci n'ont pas encore été axiomatisées. Les foncteurs les plus utiles parmi ceux reliant ces catégories sont considérés en 3.1.2, mais nous ne prétendons pas avoir indiqué toutes les compatibilités auxquelles ils donnent lieu. De ce fait, nous sommes obligés, dans ce n°, de partir d'une catégorie abélienne A, de sa catégorie dérivée DA , et de sa catégorie dérivée filtrée DFA . Modifiant la définition donnée en 1.1.4, nous la définissons ici comme déduite par calcul de fraction de la catégorie des complexes munis d'une filtration finie (et non seulement finie degré par degré). C'est la définition de [8] V § 1,2, où le lecteur trouvera un exposé systématique. De même pour D^* , * = +, -, b. On utilisera aussi incidemment la catégorie dérivée bifiltrée DF²A , qu'on peut considérer comme étant la "catégorie dérivée filtrée" compagnon de la catégorie triangulée DFA .

Si la catégorie abélienne A a assez d'injectifs, D^+A s'identifie à la catégorie des complexes bornés à gauche d'objets injectifs de A, les morphismes de complexes étant pris à homotopie près, et D^+FA (resp. D^+F^2A) s'identifie à la catégorie des complexes bornés à gauche filtrés (resp. bifiltrés) d'objets injectifs de A, la filtration (resp. bifiltration) étant finie et scindable en chaque degré, et les morphismes de complexes filtrés (resp. bifiltrés) étant pris modulo les homotopies compatibles aux filtrations (i.e. modulo les dH+Hd, où H, de degré -1, respecte les filtrations) ([8]V 1.4.7 pour D^+F).

Nos filtrations seront tantôt croissantes, tantôt décroissantes. On passe des unes aux autres en posant $F_i:=F^{-i}$.

3.1.2. Travaillons avec des filtrations décroissantes. On dispose des foncteurs suivants reliant $\,\text{DA}\,\,$ et $\,\text{DFA}\,\,$.

$$\text{(3.1.2.1)} \quad \text{Gr}_F^{\underline{i}} : \text{DFA} \, \longrightarrow \, \text{DA} \, : \, (\text{K,F}) \, \longmapsto \, \text{Gr}_F^{\underline{i}}(\text{K}) \ ,$$

(3.1.2.2) oubli : ω : DFA \longrightarrow DA : (K,F) \longmapsto K , et plus généralement,

$$(3.1.2.3) \quad \text{F}^{\dot{1}/\text{F}^{\dot{j}}} : \text{DFA} \longrightarrow \text{DA} : (\text{K},\text{F}) \longmapsto \text{F}^{\dot{1}}\text{K}/\text{F}^{\dot{j}}\text{K} \quad (-\infty \leq \dot{1} \leq \dot{9} \leq \infty).$$

Fonctorialité . Pour (i,j) \geq (k,l) on dispose de $F^1/F^j \to F^k/F^l$, avec transitivité pour (i,j) \geq (k,l) \geq (m,n). On dispose aussi de Morphismes de degré 1 : $F^{-\infty}/F^{\frac{1}{2}}$ donnant lieu pour $i\geqslant j$ à des carrés commutatifs

$$F^{-\infty}/F^{\dot{1}} \xrightarrow{\qquad \qquad (1)} F^{\dot{1}}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$F^{-\infty}/F^{\dot{1}} \xrightarrow{\qquad \qquad (1)} F^{\dot{1}}$$

Pour $i \geq j \geq k$, le triangle $(F^j/F^i,F^k/F^j,F^k/F^j)$ est distingué (flèche de degré $1:F^k/F^j \to F^{-\infty}/F^j \xrightarrow{(1)} F^j \to F^j/F^i)$. Un tel système de triangles distinguésest ce que Verdier, inspiré par la construction des suites spectrales dans Cartan-Eilenberg, a appelé un objet spectral de DA .

En sens inverse, on dispose de

(3.1.2.4) filtration triviale : DA \longrightarrow DFA : K \longmapsto (K,Tr) avec $Gr_{Tr}^{O}K = K \quad \text{et} \quad Gr_{Tr}^{i}K = O \quad \text{pour} \quad i \neq O \ .$

De DFA dans DFA, on dispose de

(3.1.2.5) F^O: DFA \rightarrow DFA: (K,F) \mapsto (F^OK, filtration induite), et plus généralement, pour chaque $\phi:\overline{\mathbb{Z}}\longrightarrow\overline{\mathbb{Z}}$ (où $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}$), croissant et continu, de

 $(3.1.2.6) \ [\phi]: \ DFA \longrightarrow DFA: \ (K,F) \longmapsto ((F^{\phi(-\infty)}/F^{\phi(\infty)}) \ (K), F^{\phi(n)} \ K/F^{\phi(\infty)} \ K).$ Pour $\phi(n) = n+p$, c'est $(K,F) \longmapsto (K,F[p])$. Généralisant l'existence d'un triangle de base donnée et TR4, on a

(3.1.2.7) Quelle que soit la suite de morphismes ... $\to K_{n+1} \to K_n \to ...$ ($n \in \mathbb{Z}$) de D A , avec $K_i = 0$ pour $i \gg 0$ et $K_{i+1} \xrightarrow{\sim} K_i$ pour $i \ll 0$, il existe (K,F) dans DFA telle que la suite donnée soit isomorphe à celle des $F^i K$.

On a les mêmes relations entre DF²A et DFA (de deux façons

différentes : par exemple, on a F^i/F^j , et G^i/G^j : $\text{DF}^2\text{A} \longrightarrow \text{DFA})$. On dispose en outre de

$$\begin{array}{ll} \text{(3.1.2.8) filtration diagonale}: DF^2A \longrightarrow DFA : (K,F,G) \rightarrow (K,\delta(F,G)), \\ \text{avec} \quad \delta(F,G)^p = \sum_{i+j=p}^{i} F^i \cap G^j = \bigcap_{i+j=p+1} F^i + G^j \text{, et} \\ \end{array}$$

$$(3.1.2.9) \quad \operatorname{Gr}_{\delta(F,G)}^{p} = \bigoplus_{i+j=p} \operatorname{Gr}_{F}^{i} \operatorname{Gr}_{G}^{j} \quad .$$

3.1.3. Soit A une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs. Pour K dans DFA et L dans D⁺FA , on dispose d'un objet naturel RHom(K,L) dans DFAb. Si les composantes de L , supposé borné inférieurement, sont de gradué injectif, RHom(K,L) est l'image dans DFAb du complexe filtré Hom(K,L) donné par la règle habituelle

$$\operatorname{Hom}^{n}(K,L) = \prod_{j-i=n} \operatorname{Hom}(K^{i},L^{j}) ;$$

 $\texttt{f} = (\texttt{f}_{\underline{\textbf{i}}}) \in \texttt{Hom}^n(\texttt{K},\texttt{L}) \quad \texttt{est dans} \quad \texttt{F}^k \quad \texttt{si} \quad \texttt{f}_{\underline{\textbf{i}}}(\texttt{F}^m\texttt{K}^{\underline{\textbf{i}}}) \subset \texttt{F}^{m+k}\texttt{L}^{\underline{\textbf{i}}+n} \ (\ \forall \textbf{i} \ \forall \, \textbf{m}) \ .$

On a

$$\text{(3.1.3.1)} \quad \text{Gr}_F^k \text{RHom}(\textbf{K}, \textbf{L}) = \prod_{m-n=k} \quad \text{RHom}(\text{Gr}_F^n \textbf{K}, \text{Gr}_F^m \textbf{L}) \quad \text{([8]V 1.4.9)}$$

(3.1.3.2)
$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{DA}}(\omega K, \omega L) = \operatorname{H}^{\operatorname{O}}\omega \operatorname{RHom}(K, L)$$
 (ω = oubli de F)

(3.1.3.3)
$$Hom_{DFA}(K,L) = H^{O}F^{O}RHom(K,L)$$
 ([8] V 1.4.6).

Les complexes filtrés $RHom\,(K,L)$ et $F^{\mbox{O}}RHom\,(K,L)$ fournissent des suites spectrales

$$(3.1.3.4) \quad \mathbb{E}_{1}^{pq} = \prod_{j-i=p} \operatorname{Hom}^{p+q}(\operatorname{Gr}_{F}^{i} \mathbb{K}, \operatorname{Gr}_{F}^{j} \mathbb{L}) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{DA}^{p+q}(\omega \mathbb{K}, \omega \mathbb{L}) \quad .$$

$$\begin{array}{lll} \text{(3.1.3.5)} & \text{E}_{1}^{pq} = & \left\{ \begin{array}{lll} \text{même groupe si} & \text{p} \geq \text{O} \\ \\ \text{O} & \text{si} & \text{p} < \text{O} \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \text{Hom}_{DFA}^{p+q}(\text{K,L}) \quad .$$

Comparant ces suites spectrales, on obtient (i) ci-dessous.

Proposition 3.1.4. Soient (K,F), (L,F) comme ci-dessus.

(i) $\underline{\text{Si}} \quad \text{Hom}^{\text{D}}(\text{Gr}_{\text{F}}^{\text{i}}\text{K},\text{Gr}_{\text{F}}^{\text{j}}\text{L}) = 0 \quad \underline{\text{lorsque}} \quad \text{n = 0} \quad \underline{\text{ou}} \quad -1 \quad \underline{\text{et}} \quad \text{i > j , } \underline{\text{par}}$ $\underline{\text{exemple si}} \quad \text{Hom}^{\text{D}}(\text{Gr}_{\text{F}}^{\text{i}}\text{K}[\text{-i}],\text{Gr}_{\text{F}}^{\text{j}}\text{L}[\text{-j}]) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad \text{n < 0 , } \underline{\text{alors}}$

$$\text{Hom}_{DFA}(K,L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{DA}(\omega K, \omega L)$$

(ii) Si $\operatorname{Hom}^n(\operatorname{Gr}_F^iK,\operatorname{Gr}_F^jL)=0$ lorsque n=0 ou 1 et n+i-j < 0, par exemple si $\operatorname{Hom}^n(\operatorname{Gr}_F^iK[i],\operatorname{Gr}_F^iL[j])=0$ pour n<0, alors

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{DFA}}(\mathrm{K,L}) = \mathrm{E}_2^{\operatorname{OO}} = \operatorname{Ker}(\mathrm{d}_1 : \mathrm{E}_1^{\operatorname{OO}} \to \mathrm{E}_1^{\operatorname{lo}})$$
 .

Pour (i), utiliser le triangle $(F^{\text{O}},\omega,F^{-\infty}/F^{\text{O}})$ et la suite spectrale

pour obtenir la nullité de H^O et H^{-1} de $F^{-\infty}/F^O$. Pour (ii), utiliser la suite spectrale (3.1.3.5).

3.1.5. Soient A une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, $\mathcal D$ une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbb D^+ A$, $(\mathcal D^{\leq 0}, \mathcal D^{\geq 0})$ une t-structure sur $\mathcal D$, $\mathcal D^b$ la sous-catégorie de $\mathcal D$ réunion des $\mathcal D^{[a,b]} = \mathcal D^{\leq b} \cap \mathcal D^{\geq a}$ et $\mathcal C = \mathcal D^{\leq 0} \cap \mathcal D^{\geq 0}$. Soit $\mathcal D^F$ (resp. $\mathcal D^b F$) la sous-catégorie de $\mathbb D^+ F A$ formée des objets de filtration finie (K,F) tels que les $\mathbb G^{\frac 1 p} K$ soient dans $\mathcal D$ (resp. $\mathcal D^b$) .

Pour définir les filtrations canoniques, il est commode de prendre les filtrations croissantes. On dira que (K,T) dans $\mathcal{D}^b F$ (avec T croissante) est canonique si les $(Gr_i^T K)[i]$ sont dans C. Cela revient à demander que les $T_i K$, munis du morphisme naturel $T_i K \longrightarrow K$ s'identifient aux $p_{T_{\leq i} K}$. On a alors $p_{H^i K} = (Gr_i^T K)[i]$.

Que ω soit pleinement fidèle résulte aussitôt de 3.1.4.(i), et de ce que $\operatorname{Hom}^n(A,B)=0$ pour n<0 et A,B dans $\mathcal C$. La surjectivité essentielle résulte de (3.1.2.7) appliqué à la suite des $\operatorname{P}_{\tau_{\leq i}K}$.

3.1.7. Nous nous proposons de définir un foncteur $D^b(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}^b$. Nous le ferons en identifiant les complexes bornés d'objets de \mathcal{C} à des complexes filtrés particuliers, les complexes filtrés bêtes. Pour les définir, il est commode de prendre les filtrations décroissantes. On dira que (K,F) dans \mathcal{D}^bF (avec F décroissante) est bête si les

 $(Gr_F^iK)[i]$ sont dans C .

Soit (K,F) dans \mathcal{D}^bF , et posons $K^i := (Gr_F^iK)[i]$. Les triangles distingués $(Gr_F^{i+1},F^i/F^{i+2},Gr_F^i)$ fournissent des morphismes de degré l $Gr_F^iK \longrightarrow Gr_F^iK$, i.e. des morphismes $d^i:K^i \longrightarrow K^{i+1}$. Le morphisme de triangles $(F^{i+1}/F^{i+3},F^i/F^{i+3},Gr_F^i) \longrightarrow (Gr_F^{i+1},F^i/F^{i+2},Gr_F^i)$ montre que le morphisme de degré l : $Gr_F^iK \xrightarrow{(1)} Gr_F^iK$ se factorise par F^{i+1}/F^{i+3} , de sorte que $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Ceci nous fournit un foncteur $G:\mathcal{D}^bF \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathcal{D})$.

Que G soit pleinement fidèle résulte aussitôt de 3.1.4 (ii) et de ce que ${\rm Hom}^n(A,B)=0$ pour n < 0 et A,B dans C: pour K,L dans ${\it D}^bF_{b\hat{a}te}$, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_{F}}(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = \text{Ker}(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{Hom}(\mathbf{K}^{i}, \mathbf{L}^{i})) \xrightarrow{d_{1}} \mathbf{Hom}(\mathbf{K}^{i}, \mathbf{L}^{i+1}))$$
;

on a $d_1(f)$ = df-fd (formule dont nous n'avons besoin qu'au signe près, et dont la vérification est laissée au lecteur), et $Hom_{\mathcal{D}F}(K,L)$ s'identifie donc au groupe des morphismes de complexes de K^* dans L^* .

Prouvons la surjectivité essentielle. Soit donc $0\to K^a\to\dots K^b\to 0 \qquad (a\le b)\quad un \ complexe \ borné \ d'objets \ de \ ^C\ ,$ et cherchons un complexe filtré bête (K,F) dont il soit l'image par G .

Tout complexe filtré X du type suivant répond au problème :

$$X^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}$$

$$F^{p}X^{n} = \bigoplus_{i+j=n, i \geq p} K^{i,j}$$

d = $(-i)^i$ d"+d'+r , avec r de filtration \geq 2 , i.e. tel que avec rF p \subset F $^{p+2}$.

Posons $H_0 = (-1)^i d^n$, $H_1 = d^n$ et cherchons inductivement H_p bihomogène de degré (p,-p+1) tel que $d_p = \sum_{n=0}^p H_n$ vérifie $(*)d_p \circ d_p$ est de filtration $\geq p+1$.

Pour p=1, cette condition est vérifiée : elle exprime que chaque $d_{\underline{i}}'$ est un morphisme de complexes. Pour $p \geq b-a$, elle implique que $d_p \circ d_p = 0$, i.e. que $d:=d_p$ répond au problème posé.

Par hypothèse, $d^{i+1} \circ d^{i}$: $K^{i,*} \longrightarrow K^{i+2,*}$ est nul dans la catégorie dérivée, donc homotope à zéro. Posons $d^{i+1} \circ d^{i} = d^{n}H_{2}^{i}+H_{2}^{i}d^{n}$. On peut prendre pour H_{2} la somme $\sum_{i} (-1)^{i+1}H_{2}^{i} \text{ (vérification laissée au lecteur)}.$

Supposons que $p\geq 2$, et construisons H_{p+1} . Soit ϕ la composante de premier degré p+1 de $d_p \circ d_p$. Calculant la composante de premier degré p+1 des deux membres de l'identité $d_p \circ (d_p \circ d_p) = (d_p \circ d_p) \circ d_p$, on obtient $d'' \phi + (-1)^p \phi d'' = 0$: ϕ est un système de morphismes de complexes de degré 1-p: ϕ^i : $K^i \to K^{i+p+1}$. Puisque $Hom^n(A,B) = 0$ pour n < 0 et A,B dans $\mathcal C$, il existe H^i_{p+1} , de degré -p, tel que $\phi^i = d'' H^i_{p+1} + (-1)^{1-p} H^i_{p+1} d''$. On peut prendre pour H_{p+1} la somme $\sum_i (-1)^{i+p} H^i_{p+1}$.

<u>2ème solution</u> (esquisse). C'est essentiellement la même, écrite dans un langage où le fait qu'on soit parti de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne n'apparaîtra pas explicitement. Il apparaîtrait dans la vérification des compatibilités que nous admettons.

On procède par récurrence sur b-a. Si b = a , on prend une filtration triviale. Si a < b , choisissons p tel que a \leq p < b et considérons le morphisme de complexes (avec K en degré b)

L'hypothèse de récurrence s'applique à sa source et à son but, et la pleine fidélité de G nous fournit

$$\widetilde{f}$$
: (A,F) \longrightarrow (B,F)

tel que $f = Gr(\tilde{f})$.

Notons F[n] la filtration translatée: $F[n]^{\dot{i}} = F^{n+\dot{i}}$ (3.1.2.6). Le cône (dans $\mathcal{P}F$) sur le morphisme composé

W)

$$(A,F[1]) \xrightarrow{id_A} (A,F) \xrightarrow{\widetilde{f}} (B,F)$$

répond au problème posé.

3.1.9. Nous appellerons "réalisation" le foncteur real := ωG^{-1} : $C^b(C) \longrightarrow \emptyset^b$ qui à chaque complexe borné K^* d'objets de C associe l'objet de D^b déduit par oubli de la filtration du complexe bête (K,F) dont K^* est l'image par G:

$$\mathfrak{D}^{b}F_{b\hat{e}te} \xrightarrow{G} \mathfrak{C}^{b}(C)$$

$$\omega \qquad \qquad real$$

Si (K,F) est bête, (K[1],F[1]) l'est aussi, avec (3.1.9.2) $(Gr_F^i)^{[1]}K[1]$ [i]= $(Gr_F^{i+1})^{[1]}K[1]$.

Les isomorphismes (3.1.9.2) rendent anticommutatifs les diagrammes

i.e. définissent un isomorphisme

$$G(K[1],F[1]) = (GK)[1]$$
,

d'où un isomorphisme

(3.1.9.3)
$$real(K^*[1]) = (real K^*)[1]$$
.

$$\underline{\text{Lemme}} \text{ 3.1.11 . real : } \textbf{C}^{\textbf{b}}(\textbf{C}) \, \rightarrow \, \textbf{D}^{\textbf{b}} \quad \underline{\text{se factorise par}} \quad \textbf{K}^{\textbf{b}}(\textbf{C}) \ .$$

Soient K et L dans $C^{b}(C)$, images par G de (K,F) et

(L,F) dans $\mathcal{D}F_{\mbox{b\^{e}te}}$. Le lemme résulte du diagramme commutatif suivant, extrait du morphisme de suites spectrales (3.1.3.5) \longrightarrow (3.1.3.4) :

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{C}^{\operatorname{b}}\operatorname{C}}(\operatorname{K}^*,\operatorname{L}^*) = \operatorname{E}_2^{\operatorname{oo}} \operatorname{de} (3.1.3.5) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\operatorname{DF}}((\operatorname{K},\operatorname{F}),(\operatorname{L},\operatorname{F}))$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{K}^{\operatorname{b}}\operatorname{C}}(\operatorname{K}^*,\operatorname{L}^*) = \operatorname{E}_2^{\operatorname{oo}} \operatorname{de} (3.1.3.4) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\operatorname{D}}(\operatorname{K},\operatorname{L})$$

<u>Lemme</u> 3.1.12. <u>Le foncteur</u> real : $K^b(C) \longrightarrow D$ <u>transforme triangles</u> distingués en triangles distingués.

Soit $f:(K,F)\longrightarrow (L,F)$ un morphisme de complexes filtrés dans $\mathcal{D}F$, et soit \widetilde{F} la filtration sur le cône C(f) de f pour laquelle $\widetilde{F}^iC(f)^m=F^iL^n\bigoplus F^{i+1}K^{n+1}:(C(f),\widetilde{F})$ est le cône de $(K,F[1])\longrightarrow (K,F)\longrightarrow (L,F)$. L'isomorphisme naturel $Gr_{\widetilde{F}}^{i}C(F)=\mathbb{I}(Gr_{F}^{i+1}K)[1]\bigoplus Gr^iL$ donne lieu à un isomorphisme GC(f)=C(G(f)). En particulier, si (K,F) et (L,F) sont bêtes, (C(f),F) l'est aussi _ et $C(\omega f)=\omega C(f)$ s'identifie à real(C(f)). Plus précisément, le triangle naturel (K,L,C(f)) s'identifie à l'image par real de (G(K),G(L),C(G(f)). Ceci prouve 3.1.12.

On peut représenter Σ par une suite exacte courte Σ^* de complexes $A^* \to B^* \to C^*$ d'objets de A. Traitons Σ^* comme un double complexe (de premier degré valant 0,1 et 2 sur A^*,B^*,C^*). Le complexe simple associé $\underline{\underline{s}}\Sigma^*$, filtré par le premier degré, est bête, de gradué Σ . On a donc $\underline{\underline{s}}\Sigma^*$ = real(Σ), et on conclut en observant que $\underline{\underline{s}}\Sigma^*$ est acyclique, puisque ses lignes le sont.

3.1.14. Construction d'isomorphismes $H^{i} = {}^{p}H^{i}$ oreal.

Soit K* dans $C^b(C)$. Le tronqué $\tau_{\leq i}$ K* est défini par $(\tau_{\leq i}$ K*) $j = K^j$ pour j < i, Ker(d) pour j = i et 0 pour j > i. Définissons $\tau'_{\leq i}$ K* par $(\tau'_{\leq i}$ K*) $j = K^j$ pour $j \leq i$, Im d pour j = i+1 et 0 pour j > i+1. Le cône du morphisme d'inclusion $\tau_{\leq i}$ K* $\longrightarrow \tau'_{\leq i}$ K* est homotope au complexe Ker(d) $\longrightarrow K^i \longrightarrow Im$ d (degrés i-1,i,i+1). D'après 3.1.13, la réalisation de ce dernier

complexe est nulle, et d'après 3.1.12 le morphisme

$$real(\tau_{\leq i}K^*) \longrightarrow real(\tau_{\leq i}K^*)$$

est donc un isomorphisme.

On peut remplacer $\tau_{\leq i-1} K^*$ par $\tau_{\leq i-1}^! K^*$. Le cône cherché est alors (1.3.12) la réalisation du cône du morphisme $\tau_{\leq i}^! K^* \to \tau_{\leq i} K^*$. Ce cône est homotope au complexe réduit aux degrés i-1 et $i: \operatorname{Im}(d^{i-1}) \to \operatorname{Ker}(d^i)$, i.e. au cône de

$$Im(d^{i-1})[i] \longrightarrow Ker(d^{i})[i]$$
 ,

et sa réalisation est un cône sur

$$\operatorname{Im}(\tilde{\operatorname{d}}^{i-1})[i] \longrightarrow \operatorname{Ker}(\operatorname{d}^{i})[i]$$
.

Ce cône est unique à isomorphisme unique près (cf. 1.2.3). C'est $\operatorname{H}^1_K^*$ [i] .

3.1.15. Fin de la preuve de 3.1.10. Il reste à prouver que si $f: \textbf{K}^* \longrightarrow \textbf{L}^* \text{ est un quasi-isomorphisme, real}(f) \text{ est un}$ isomorphisme dans \mathfrak{D}^b . Le système des foncteurs ${}^p\textbf{H}^i: \mathcal{D}^b \longrightarrow \mathcal{C}$ étant conservatif (1.3.7), il suffit de vérifier que les ${}^p\textbf{H}^i \text{ real}(f)$ sont des isomorphismes ; les isomorphismes 3.1.14 les identifient aux $\textbf{H}^i(f)$, qui sont des isomorphismes par hypothèse.

Proposition 3.1.16 . Pour que le foncteur real : $D^b C \to \mathcal{D}^b$ soit une équivalence de catégories, il faut et suffit que, quels que soient A et B dans C , n > O , et f \in Hom(A,B[n]) , il existe dans C un monomorphisme B \hookrightarrow B' qui efface f .

Pour A fixe, considérons le morphisme de δ -foncteurs real : $\operatorname{Hom}_{\mathbb{DC}}(A,B[n]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B[n])$. Les $\operatorname{Hom}_{\mathbb{DC}}(A,B[n])$ sont les $\operatorname{Ext}^n(A,B)$ de Yoneda, dans C . Ils sont caractérisés par les propriétés d'être nuls pour n<0, de coı̈ncider avec $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ pour n=0, et d'être effaçables au sens 3.1.16 pour n>0: la condition d'effaçabilité de 3.1.16 équivaut à ce que pour A,B dans C et

 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Hom}_{DC}(A,B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{D}(A,B[n])$$
.

Tout objet de $D^b\mathcal{C}$ se dévissant en objets de \mathcal{C} , elle implique que real est pleinement fidèle.

Il reste à montrer que si real est pleinement fidèle, il est essentiellement surjectif. Prouvons par récurrence sur $\ell=b-a$ que $\mathfrak{p}^{\{a,b\}}$ est dans l'image essentielle. Pour $\ell=0$, $\mathbb{C}[a]$ est en effet dans l'image essentielle. Si $\ell \geq 1$, soit c tel que $a \leq c < b$. Un objet K de $\mathfrak{p}^{\{a,b\}}$ donne lieu à un triangle $(\tau_{< c} ^K, K, \tau_{> c} ^K)$ et l'hypothèse de récurrence assure que $\tau_{< c} ^K$ et $\tau_{> c} ^K$ sont dans l'image essentielle. Par pleine fidélité, le morphisme d : $\tau_{> c} ^K \longrightarrow (\tau_{< c} ^K)[1]$ est de la forme real(§) , et K[1] est isomorphe à l'image par real d'un cône sur § .

(ii) On a toujours $\operatorname{Hom}_{\mathbb{D}\mathcal{C}}(A,B[n]) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{D}}(A,B[n])$ pour $n \leq 1$: le cas $n \leq 0$ est trivial, et le cas n = 1 provient de ce que \mathcal{C} est stable par extensions : toute flèche de degré 1 d : $A \xrightarrow{(1)} B$ est la flèche de degré 1 d'un triangle distingué $B \xrightarrow{b} E \xrightarrow{a} A \xrightarrow{d}$, et tant $a: E \xrightarrow{\rightarrow} A$ que $b: B \xrightarrow{\hookrightarrow} E$ effacent d.

3.2. Localisation.

3.2.1. Soit § un site, annelé par un faisceau d'anneaux 0 . On suppose pour simplifier que les limites projectives finies existent dans § , et on note § un objet final. Pour tout U \in Ob § , on note D(U) la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des faisceaux de 0-modules sur U (i.e. sur le site §|U) . Pour f : V \longrightarrow U dans §, on dispose d'un foncteur "image inverse" f* : D(U) \longrightarrow D(V) . Pour K dans D(U) et L dans D(V) , un f-morphisme de K dans L est un morphisme f*K \longrightarrow L .

Les D(U) ne forment en général pas un champs sur S : ni les objets, ni les morphismes de la catégorie dérivée D(S) ne sont de nature locale sur S . On a toutefois la

La suite spectrale du local au global

$$E_2^{pq} = H^p(S, \underline{Ext}^q(K, L)) \Rightarrow Ext^{p+q}(K, L)$$

fournit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{D(S)}(K,L) = H^{O}(S, \underline{\text{Hom}}(K,L))$$

La même formule vaut avec S remplacé par U quelconque dans S , d'où la proposition

3.2.3. Le but du paragraphe est de compléter ce résultat en montrant que, sous des hypothèses convenables de nullité d' $\underline{\text{Ext}}^i$ négatifs, il suffit de se donner localement un objet de $D^b(S)$ pour se le donner en fait.

Soit C un crible couvrant l'objet final S de S . Appelons objet de D(S) donné C-localement la donnée pour tout U dans C de K_U dans D(U) et pout tout morphisme V: V \longrightarrow U entre objets de C d'un v-morphisme $\phi_v: K_U \longrightarrow K_V$ défini par un isomorphisme $\phi_v: v^*K_U \xrightarrow{\sim} K_V$. On exige que pour un morphisme composé vw on ait $\phi_{vw} = \phi_w^\circ \circ \phi_v$.

Pour K dans D(S), le système de ses restrictions $K \mid U$ pour U dans C est un objet de D(S) donné C-localement. Réciproquement, on a :

L'assertion d'unicité résulte de 3.2.2. Pour prouver l'existence nous nous inspirerons de la preuve de 3.1.8 et de la théorie de la descente cohomologique (SGA4 VI B, résumé dans [2] § 5).

3.2.5. Version simpliciale du problème . Quitte à changer de site

sans changer de topos, on peut supposer que le crible $\,C\,$ est engendré par un objet $\,U\,$ de $\,S\,$, couvrant l'objet final. Il revient alors au même de se donner $\,C\,$ -localement un objet de $\,D(S)\,$, ou de se donner un objet de $\,D(U)\,$, et un isomorphisme entre ses deux images réciproques sur $\,U\,\times\,U\,$ (produit fibré sur $\,S\,$) vérifiant la condition de cocycle usuelle sur $\,U\,\times\,U\,\times\,U\,$.

Soit Δ_n $(n \ge -1)$ l'intervalle [0,n] de \mathbb{N} , et considérons le système simplicial des puissances $\mathbb{U}^{\Delta n}$ de \mathbb{U} , $(n \ge 0)$. Seul nous servira le système simplicial strict sous-jacent (on oublie les dégénérescences). Un système simplicial strict d'objets \mathbb{K}^n dans les $\mathbb{D}(\mathbb{U}^{\Delta n})$ $(n \ge 0)$ est la donnée, pour chaque $n \ge 0$, de \mathbb{K}^n dans $\mathbb{D}(\mathbb{U}^{\Delta n})$, et pour chaque injection croissante $\alpha:\Delta_n \longleftrightarrow \Delta_m$ - induisant une projection $\mathbb{P}(\alpha):\mathbb{U}^{\Delta m} \longrightarrow \mathbb{U}^{\Delta m} - \mathbb{U}^{\Delta m} - \mathbb{U}^{\Delta m} - \mathbb{U}^{\Delta m} \to \mathbb{U}^{\Delta m} - \mathbb{U}^{\Delta m} \to \mathbb{U}^{\Delta$

Il revient encore au même de se donner C-localement un objet de D(S) , ou de se donner un système simplicial strict cartésien d'objets \textbf{K}^n dans les $\textbf{D}(\textbf{U}^{\Delta\,n})$. Il nous faut montrer que si un tel système vérifie

- α) $H^{i}K^{0} = 0$ pour |i| assez grand et
- β) sur U , on a $\underline{Ext}^{i}(K^{O}, K^{O}) = 0$ pour i < 0 , alors K^{*} provient par restriction de K dans $D^{b}(S)$.

La preuve sera donnée en 3.2.18, après quelques préliminaires simpliciaux.

3.2.6. Soient (Δ) la catégorie des ensembles finis $\Delta_n = [0,n]$ ($n \geq -1$) et des injections croissantes entre eux, (Δ)⁺ la souscatégorie des Δ_n ($n \geq 0$), A une catégorie fibrée et cofibrée sur (Δ), et A^+ son image inverse sur (Δ)⁺. Pour $\alpha:\Delta_n \to \Delta_m$ une flèche de (Δ), nous poserons $s(\alpha) = n$ et $b(\alpha) = m$. Notons A(n) la fibre de A au-dessus de Δ_n . Eu égard au cas qui nous intéresse où A(n) est la catégorie des faisceaux de 0-modules sur $D^{\Delta n}$, quel que soit $\alpha:\Delta_n \to \Delta_m$, on note ($p(\alpha)^*,p(\alpha)_*$), ou simplement (α^*,α_*), la paire de foncteurs adjoints tels que

$$\operatorname{Hom}_{\alpha}(F,G) = \operatorname{Hom}_{A(m)}(p(\alpha)^*F,G) = \operatorname{Hom}_{A(n)}(F,p(\alpha)_*G)$$
.

On suppose que les catégories A(n) sont additives, et que les foncteurs $p(\alpha)^*$ et $p(\alpha)_{\downarrow}$ sont additifs.

De la catégorie A sur (Δ) se déduit une série de catégories sur (Δ), (ou sur (Δ) par restriction) de fibres les catégories $C(A(n)) \text{ , } K(A(n)), \ldots \text{ . Pour toute catégorie } \mathcal{B} \text{ sur } (\Delta)^+, \pi \colon \mathcal{B} \to (\Delta)^+, \text{ une section de } \mathcal{B} \text{ sur } (\Delta)^+, \text{ ou système simplicial strict d'objets } \\ \frac{\text{des catégories fibres}}{\text{des catégories fibres}} \mathcal{B}(n) \text{ , est un foncteur } s \colon (\Delta)^+ \to \mathcal{B} \text{ tel que } \\ \pi \circ s = \text{Id} \text{ ; c'est une famille d'objets } \\ \mathcal{B}_n \in \text{Ob } \mathcal{B}(n) \text{ et de flèches} \\ \varphi(\alpha) \text{ où , pour } \alpha \colon \Delta_n \to \Delta_m \text{ , } \varphi(\alpha) \text{ est une } \alpha\text{-flèche de } \\ \mathcal{B}_n \text{ dans } \\ \mathcal{B}_m \text{ . Il est exigé que } \varphi(\text{Id }\Delta_n) = \text{Id}_{\mathcal{B}_n} \text{ et que } \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \text{ . Si } \\ \mathcal{B} \text{ est cofibrée sur } (\Delta)^+ \text{ , la donnée des } \varphi(\alpha) \text{ équivaut à celle d'un morphisme } \varphi(\alpha)' : p(\alpha)^* \\ \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_m \text{ dans } \mathcal{B}(m) \text{ et on dit que la section } \\ \mathcal{B}_n \text{ est } \frac{\text{cartésienne}}{\text{cartésienne}} \text{ si les } \varphi(\alpha)' \text{ sont des isomorphismes. Certains préféreraient dire cocartésien.}$

3.2.7. Soit tot(A⁺) la catégorie additive suivante :

objets : familles $(A^n)_{n\geq 0}$, A^n dans A(n). flèches : $\operatorname{Hom}((A^n),(B^n))=\prod_{\alpha\in A}\operatorname{Hom}_{\alpha}(A^{s(\alpha)},B^{b(\alpha)})$ composition : $((f)\circ(g))_{\alpha}=\sum_{\alpha\in A\gamma}\operatorname{f}_{\beta}\circ g_{\gamma}$.

On identifie A^+ à une sous-catégorie de tot(A $^+$) par (A dans A(n)) \longmapsto (famille A i , avec A^n = A et A^m = O pour m \neq n) .

3.2.8. Décrivons les complexes (K,d) d'objets de $tot(A^{\dagger})$. Par définition, chaque composante Kⁱ de K est une famille (Kⁱ)^j d'objets des A(j). Renumérotons-les, en posant

$$K^{n,m} = (K^{n+m})^n$$

Pour $\alpha:\Delta_n\longrightarrow \Delta_m$, nous noterons $d(\alpha)$ la α -composante de d, un système de α -morphismes $K^{n,p}\longrightarrow K^{m,p+n-m+1}$ ou, comme nous dirons, une α -application de degré n-m+1 de $K^{n,*}$ dans $K^{m,*}$.

Soit L la filtration décroissante de K donnée par

$$\left\{ L^{p}K\right)^{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n$$

et posons

$$(K^{n,*}, d") = (Gr_L^n K)[n]$$
.

C'est un complexe dans A(n), de composantes les $K^{n,m}$, et de différentielle $(-1)^n d(\mathrm{Id}_{\Delta n})$. Pour chaque morphisme de face $\vartheta_i:\Delta_n \to \Delta_{n+1}$, posons $\vartheta_i^*=(-1)^1 d(\vartheta_i)$. Les ϑ_i^* sont des ϑ_i -morphismes de complexes $K^{n,*} \to K^{n+1,*}$ et, pour $0 \le i < j \le n+2$, les $(\vartheta_j \vartheta_i)$ -morphismes $\vartheta_j^* \vartheta_i^*$ et $\vartheta_i^* \vartheta_{j-1}^*$ sont homotopes, une homotopie étant donnée par $\pm d(\vartheta_j \vartheta_i)$. Plus généralement, pour chaque $\alpha:\Delta_n \longrightarrow \Delta_m$, l'équation $d \circ d = 0$ fournit l'identité

$$(3.2.8.1) \qquad \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = 0$$

Notons \sum une somme où il n'est pas permis aux indices d'être une application identique. Pour m > n, l'identité (3.2.8.1) se récrit

(3.2.8.2)
$$\sum_{\alpha=\beta\gamma}' d(\beta)d(\gamma) = (-1)^{m+1} (d''d(\alpha) + (-1)^{m-n}d(\alpha)d'')$$

et exprime que la somme au membre de gauche est un α -morphisme de complexes de degré n-m+1, homotope à zéro par l'homotopie $(-1)^{m+1}d(\alpha)$.

Réciproquement, un système de complexes $K^n, * \in ObC(A(n))$ $(n \geq 0)$ et d'applications $d(\alpha)$ $(\alpha$ flèche de $(\Delta)^+)$, où $d(\alpha)$ est une α -application de degré $s(\alpha)-b(\alpha)+1$ de $K^{s(\alpha)}, *$ dans $K^{b(\alpha)}, *$, où $d(Id_{\Delta n})$ est la différentielle de $K^n, *$, au signe $(-1)^n$ près, et où le système des $d(\alpha)$ vérifie (3.2.8.2), provient de (K,d) dans $C(tot A^+)$. Dans ce langage, un morphisme de complexes $f: K \to L$ est un système d'applications $f(\alpha)$, $(\alpha$ flèche de $(\Delta)^+)$, où $f(\alpha)$ est une α -application de degré $s(\alpha)-b(\alpha)$ de $K^{s(\alpha)}, *$ dans $L^{b(\alpha)}, *$, et où pour tout α

(3.2.8.3)
$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta) f(\gamma) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} f(\beta) d(\gamma)$$

Voici une condition suffisante pour qu'un système simplicial strict (\textbf{K}^n) d'objets des catégories K(A(n)) provienne d'un objet de $\textbf{K}(\text{tot A}^+)$.

 $\begin{array}{c} \underline{\text{Proposition}} \text{ 3.2.9.} & \underline{\text{Si,quels que soient}} \text{ n , m} \underline{>} \text{n+3} & \underline{\text{et}} \text{ } \alpha : \Delta_n \longrightarrow \Delta_m \text{ ,} \\ \underline{\text{morphisme dans}} & (\Delta)^+, \underline{\text{ on a }} & \underline{\text{Hom}^i(p(\alpha)^*K^n,K^m)} = 0 & \underline{\text{pour}} & i < 0 \text{ , alors} \\ \underline{\text{le système simplicial strict des}} & K^n \in \text{Ob } K(A(n)) & \underline{\text{provient d'un objet}} \\ \underline{\text{de}} & K(\text{tot } A^+) \end{array}$

Réalisons chaque K^n comme un complexe $(K^n, *, d^n)$ et chaque ∂_i^* comme un ∂_i -morphisme de complexes, encore noté $\partial_i^*: K^{n,*} \to K^{n+1}, *^i$. Pour $\mathrm{Id}: \Delta_n \to \Delta_n$, posons $\mathrm{d}(\mathrm{Id}) = (-1)^n d^n$, et pour chaque $\partial_i: \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, posons $\mathrm{d}(\partial_i) = (-1)^i \partial_i^*$. Par hypothèse, pour $0 \le i < j \le n+2$, $\partial_j^* \partial_i^*$ et $\partial_i^* \partial_j^*$ sont homotopes. Il existe donc $\mathrm{d}(\partial_j \partial_i)$ vérifiant (3.2.8.2). Montrons l'existence d'un système de $\mathrm{d}(\alpha)$ vérifiant (3.2.8.2) et prolongeant le système des $\mathrm{d}(\alpha)$ déjà choisis. On procède inductivement : supposons les $\mathrm{d}(\alpha)$ déjà choisis pour $\mathrm{b}(\alpha)$ -s $(\alpha) \le k$ $(k \ge 2)$, et construisons les pour $\mathrm{b}(\alpha)$ -s (α) =k+1. Il suffit de montrer que

En effet, l'hypothèse assume alors que $S(\alpha)$ est homotope à zéro, i.e. l'existence de $d(\alpha)$ vérifiant (3.2.8.2). Prouvons (*). Soit D la somme des $d(\beta)$ pour $b(\beta)-s(\beta) \le k$, et exprimons que $(D \circ (D \circ D))(\alpha) = \pm ((D \circ D) \circ D)(\alpha)$. Le membre de gauche I vaut $\sum_{\alpha=\beta\gamma,\,\beta\neq\alpha} d(\beta)(D \circ D)(\gamma)$. L'hypothèse de récurrence assure que $(D \circ D)(\gamma) = 0$ pour $\gamma \ne \alpha$, de sorte que I = $d(Id)S(\alpha)$. De même, le membre de droite est $S(\alpha)d(Id)$, et donc

$$d(Id)S(\alpha) = S(\alpha)d(Id)$$
,

ce qui équivaut à (*) .

3.2.10. Soit ϵ_n l'unique application de Δ_{-1} dans Δ_n . Pour tout A dans A(-1), le système des $p(\epsilon_n)^*A$ est un objet simplicial strict de A^+ , et définit un complexe dans tot A^+ . Cette construction s'étend aux complexes : pout tout complexe $K \in ObC(A(-1))$, nous noterons ϵ^*K le complexe dans tot A^+ défini par le système simplicial strict des $p(\epsilon_n)^*K$, et pour lequel les $d(\alpha)$ supérieurs (relatifs aux α tels que $b(\alpha)-s(\alpha)>1$) sont nuls. On gradue ce foncteur par l'isomorphisme

$$(-1)^n : (\varepsilon^*(K[1]))^{n,m} = p(\varepsilon_n)^*K^{m+1} \rightarrow ((\varepsilon^*K)[1])^{n,m} =$$

$$= p(\varepsilon_n)^*K^{m+1} .$$

Pour ce choix, le foncteur encore noté $\epsilon^*: K(A(-1)) \longrightarrow K(\text{tot } A^+)$, déduit de ϵ^* par passage au quotient, transforme triangles distingués en triangles distingués.

3.2.11.Appelons $C(\text{tot }A^+)^+$ (resp. $K(\text{tot }A^+)^+$) la sous-catégorie pleine de $C(\text{tot }A^+)$ (resp. $K(\text{tot }A^+)$) formée des K tels que, pour M assez petit, on ait $K^n, m=0$ pour m < M. Pour K dans $C(\text{tot }A^+)^+$, on note ϵ_*K le complexe (dans $C^+(A(-1))$ défini par $(\epsilon_*K)^p = \bigoplus_{n+m=p} p(\epsilon_n)_*K^{n,m}$ (la somme est finie) et $d = \sum d(\alpha)$ (on a abusivement noté $d(\alpha)$ le morphisme déduit de $d(\alpha)$ par image directe). On dispose d'un isomorphisme évident $\epsilon_*(K[1]) = (\epsilon_*K)[1]$, et le foncteur de $K(\text{tot }A^+)^+$ dans $K^+(A(-1))$ déduit de ϵ_* par passage au quotient transforme triangles distingués en triangles distingués. Pour K dans $C^+(A(-1))$, le système des morphismes d'adjonction $K^n \to p(\epsilon_0)_*p(\epsilon_0)^*K^n$ est un morphisme

$$(3.2.11.1) a: K \longrightarrow \varepsilon_{\downarrow} \varepsilon^* K$$

Proposition 3.2.12. Les foncteurs $\epsilon^*: K^+A(-1) \longrightarrow K(\text{tot }A^+)^+ \xrightarrow{\text{et}} \epsilon_*: K(\text{tot }A^+)^+ \longrightarrow K^+A(-1) \xrightarrow{\text{forment un couple de foncteurs adjoints}}$, avec a (3.2.11.1) pour morphisme d'adjonction.

Pour toute catégorie additive $\mathcal B$, le groupe des homomorphismes de K dans L , dans K($\mathcal B$) , est le H $^{\rm O}$ du complexe Hom(K,L) de composantes

$$\operatorname{Hom}(K,L)^{d} = \prod_{m-n=d} \operatorname{Hom}(K^{n},L^{m})$$

et de différentielle donnée sur $\operatorname{Hom}(K,L)^d$ par $\operatorname{d}(f) = \operatorname{d\circ f} - (-1)^d \operatorname{f\circ d}$. Nous préciserons 3.2.12 en montrant que pour K dans $K^+(A(-1))$ et L dans $K(\operatorname{tot} A^+)^+$, le morphisme induit par a:

$$(3.2.12.1) \quad \operatorname{Hom}(\varepsilon_{*}^{*}K,L) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(\varepsilon_{*}\varepsilon_{*}^{*}K,\varepsilon_{*}L) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(K,\varepsilon_{*}L) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}$$

est un quasi-isomorphisme. Filtrons L par une filtration décroissante de quotients successifs les complexes réduits à un L^n,m (par exemple, filtrer L par les $\bigoplus_{n\geq B} L^{n,A-n}$; cette deuxième filtration est finie). Sur les complexes Hom , on récupère une filtration séparée et complète, et il suffit de montrer que (3.2.12.1) devient un quasi-isomorphisme après passage au gradué : on peut supposer, et on suppose, L concentré en un seul bidegré. Filtrons K par la filtration par les $\sigma_{\geq n}$. Cette fois, la filtration obtenue sur Hom est finie degré par degré, et on se ramène à supposer K concentré en un seul degré. Par translation, on se ramène enfin à supposer K réduit à un objet A en degré 0 ,

et L réduit à un objet B de A(n), en bidegré (n,0). On a alors

$$\operatorname{Hom}(\epsilon^*K,L)^d = \prod_{\substack{\alpha: \Delta_{n-d} \to \Delta_n \\ n-d > 0}} \operatorname{Hom}_{\epsilon_n}(A,B) :$$

le complexe $\operatorname{Hom}(\epsilon^*K,L)$ est le produit tensoriel de $\operatorname{Hom}(A,B)$ par le complexe des chaînes non dégénérées du simplexe type Δ_n , décalé de -n. Le cône de (3.2.12.1), translaté par [-1], est donné par la même formule, sans la restriction $\operatorname{n-d} \geq 0$, et il reste à utiliser que le complexe augmenté des chaînes non dégénérées du simplexe type Δ_n est homotope à zéro.

3.2.13. Bien que cela soit inutile pour la suite, nous allons exhiber un morphisme de complexes représentant le morphisme d'adjonction de $\epsilon^*\epsilon_*L$ dans L (3.2.13 et 3.2.14). Un morphisme de complexes \underline{b} de $\epsilon^*\epsilon_*L$ dans L est (3.2.8) un système de α -applications de degré $s(\alpha)-b(\alpha)$, $\underline{b}(\alpha)$: $p(\epsilon_{s(\alpha)})^*(\epsilon_*L) \longrightarrow L^{b(\alpha)},^*$, vérifiant (3.2.8.3). Une α -application de $p(\epsilon_{s(\alpha)})^*(\epsilon_*L)$ dans $L^{b(\alpha)},^*$ s'identifie à une $\epsilon_{b(\alpha)}$ -application. $b'(\alpha)$ de ϵ_*L dans $L^{b(\alpha)},^*$. Nous écrirons formellement $\underline{b}=\sum_{\alpha}^{b}b'(\alpha)\otimes\alpha$, identifiant ainsi \underline{b} à un élément du produit sur n des groupes

 $\{\epsilon_n\text{-application de }\ \epsilon_*\text{L}\ \text{dans L}^{n\,\prime\,*})\otimes\{\text{chaînes non dégénérées de }\Delta_n\}$.

A son tour, une ϵ_n -application b' de degré s de ϵ_* L dans L^n ,* s'identifie à une famille de ϵ_n -applications b' : $p(\epsilon)$ L^p ,* \longrightarrow L^n ,*, de degrés s+p. Nous ne considérons que

 $\begin{array}{lll} b_p': \ p(\epsilon_p)_* \mathbf{L}^{p,*} & \longrightarrow \ L^n,^*, \ \text{de degrés} & \text{s+p} \ . \ \text{Nous ne considérons que des} \\ \text{applications} & b_p' & \text{somme d'applications des types suivants, indexés par} \\ \beta: \ \Delta_p & \to \Delta_n : \ \text{le composé de la} & \ \epsilon_p\text{-application naturelle de} & \ \epsilon_p \mathbf{L}^{p,*} \\ \text{dans} & \ L^{p,*}, \ \text{et d'une } \beta\text{-application} & \ b''(\beta) : \ L^{p,*} & \longrightarrow \ L^{n,*} \ . \ \text{Nous \'ecrirons formellement} \\ b' & = \sum b''(\beta) \ . \end{array}$

Au total, ceci nous amène à chercher b sous la forme

$$\underline{b} = \sum_{\alpha,\beta} b''(\alpha,\beta) \otimes \alpha ,$$

avec α et β de même but, b" (α,β) étant un β -morphisme de $L^{s(\beta)}$,* dans $L^{b(\beta)}$,* , de degré $s(\alpha)-b(\alpha)+s(\beta)=(s(\beta)-b(\beta))+s(\alpha)$. Pour chaque factorisation $\beta=\beta_1\dots\beta_{s(\alpha)}$, on a à sa disposition une β -

application de ce degré : le composé des $\;\text{d}(\beta_{\frac{1}{2}})\;$.

Nous allons montrer que le système suivant convient :

$$(3.2.13.1) \quad \underline{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}'} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} \mathbf{d}(\beta_1) \dots \mathbf{d}(\beta_k) \otimes (0, \beta_1(0), \beta_1 \beta_2(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0)).$$

La somme porte sur k,m et sur les suites de k applications composables dont le composé a pour but \vartriangle_m . La suite vide (k=0) est permise : pour chaque m , on a un terme $\operatorname{Id}_{L^m,*} \otimes (0)$. On a noté (n_0,\ldots,n_{k+1}) l'application i $\mapsto n_i$ de \vartriangle_k dans \vartriangle_m ; remplacer par 0 (ou omettre le terme) si cette application n'est pas strictement croissante.

Il s'agit de montrer que \underline{b} est un morphisme de complexes, et que b correspond par l'adjonction (3.2.12) :

$$\operatorname{Hom}(\varepsilon^*\varepsilon_*L,L) = \operatorname{Hom}(\varepsilon_*L,\varepsilon_*L)$$

à l'application identique de $\ \epsilon_* L$, i.e. que le morphisme de complexes composé

$$\epsilon_{\star}L \xrightarrow{a} \epsilon_{\star}\epsilon_{\star}L \xrightarrow{\epsilon_{\star}\underline{b}} \epsilon_{\star}L$$

est homotope à l'identité. On vérifie facilement que ce morphisme est même égal à l'identité : il ne dépend que des composantes $b'(\alpha) \otimes \alpha$ de \underline{b} , pour $\alpha: \Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$, et ces composantes sont du type $\mathrm{Id}_{\underline{L}^m,*} \otimes (0)$.

3.2.14. \underline{b} est un morphisme de complexes . L'identité à vérifier s'écrit $\underline{db} = \underline{bd}$, i.e.

$$(*) \quad \sum_{\alpha} \quad \sum_{k,\, m=s\,(\alpha)} \quad \sum_{\beta_1,\, \cdots,\, \beta_k} \quad \mathtt{d}(\alpha)\, \mathtt{d}(\beta_1)\, \ldots \mathtt{d}(\beta_k) \, \otimes \, \alpha \circ (0,\beta_1(0),\ldots,\beta_1\ldots\beta_k(0))$$

$$=\sum_{\mathbf{k},\mathbf{m}}\sum_{\beta_{1},\dots,\beta_{\mathbf{k}}}(-1)^{\mathbf{k}}\sum_{\alpha}\mathbf{d}(\beta_{1})\dots\mathbf{d}(\beta_{\mathbf{k}})\mathbf{d}(\alpha)\otimes(0,\beta_{1}(0),\dots,\beta_{1}\dots\beta_{\mathbf{k}}(0))$$

$$+\sum_{k,m}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_k}\sum_{i}^{}(-1)^{i}d(\beta_1)\dots d(\beta_k)\otimes(0,\beta_1(0),\dots,\beta_1\dots\beta_k(0))\circ\vartheta_i.$$

Les sommes sur $k,m,\beta_1,\dots,\beta_k$ sont comme en (3.2.13.1). La somme sur i va de 0 à k, sauf pour k=0, où elle est vide. On notera que si $c=(0,\beta_1(0),\dots,\beta_1\dots\beta_k(0))$ est une chaîne dégénérée de Δ_m , on a $\sum_{i=0}^{n}(-i)^ic\cdot \delta_i=0$ mod chaînes dégénérées. Pour vérifier l'identité

(*) , il suffit de montrer que pour chaque $k \ge 0$ (correspondant à k dans les deux premiers termes et à k-l pour le troisième), on a

$$\begin{split} & \sum_{\beta_{0}, \dots, \beta_{k}} d(\beta_{0}) \dots d(\beta_{k}) \otimes (\beta_{0}(0), \beta_{0}\beta_{1}(0), \dots, \beta_{0} \dots \beta_{k}(0)) \\ & - (-1)^{k} \sum_{\beta_{0}, \dots, \beta_{k}} d(\beta_{0}) \dots d(\beta_{k}) \otimes (0, \beta_{0}(0), \dots, \beta_{0} \dots \beta_{k-1}(0)) = \\ & = \sum_{\beta_{0}, \dots, \beta_{k}} \sum_{-1 \le i \le k} (-1)^{i+1} d(\beta_{0}) \dots d(\beta_{k}) \otimes (0, \beta_{0}(0), \dots, \beta_{0} \dots \beta_{i}(0)^{\wedge}, \dots, \beta_{0} \dots \beta_{k}(0)). \end{split}$$

Les sommes portent sur les chaînes de $\,$ k+1 morphismes composables,et (n_0,\dots,n_k) désigne une application de $\,^\Delta_k\,$ dans $\,^\Delta_b(\beta_0)\,$ (et 0 si cette application n'est pas injective). Les termes au membre de gauche correspondent à i = -1 et i = k au membre de droite. Pour conclure, il suffit de vérifier que pour chaque $\,k \geq 0$, chaque i $(-1 < i < k)\,$ et chaque choix de $\,^\beta_0,\dots,\beta_{i-1}\,$, du composé $\,^\beta_i=\beta_i\beta_{i+1},$ et de $\,^\beta_{i+2},\dots,\beta_k\,$, choix qui suffit à fixer la chaîne $(0,\beta_0\,(0),\dots,\beta_0\dots\beta_i\,(0)^{\widehat{}},\dots,\beta_0\dots\beta_k\,(0))$, on a

$$\sum_{\beta_i \beta_{i+1} = \beta} d(\beta_0) \dots d(\beta_k) = 0 .$$

Cela résulte de (3.2.8.1).

3.2.15. Supposons maintenant que les catégories A(n) sont abéliennes, ont assez d'injectifs, et que les foncteurs $p(\alpha)^*$ sont exacts. Les foncteurs $p(\alpha)_*$ transforment donc injectifs en injectifs. Un morphisme $f: K \to L$ dans $C(\text{tot } A^+)$ sera appelé un $\underline{\text{quasi-isomor-phisme}}$ si les $f(\text{Id}_{\Delta_n}): K^n,^* \to L^n,^*$ sont des quasi-isomorphismes. Cette condition est invariante par homotopie. Elle s'énonce encore : les $\text{Gr}_L^n(f)$ sont des quasi-isomorphismes. La $\underline{\text{catégorie}}$ dérivée $D(\text{tot } A^+)^+$ est la catégorie déduite de $K(\text{tot } A^+)^+$ en inversant les quasi-isomorphismes.

Le foncteur ϵ^{*} passe trivialement aux catégories dérivées, et définit un foncteur exact

$$\varepsilon^*: D^+(A(-1)) \longrightarrow D(tot A^+)^+$$
.

Le foncteur ϵ_{*} , lui, se dérive en

$$R_{\varepsilon_*}: D(\text{tot A}^+)^+ \longrightarrow D^+(A(-1))$$
.

Pour calculer sa valeur en L dans $C(\text{tot A}^+)^+$, on remplace L par un complexe quasi-isomorphe L': $L \xrightarrow{\approx} L'$, à composantes bihomogènes injectives, et on prend $\epsilon_* L'$. Il suffit en fait que le complexe quasi-isomorphe L' dans $C(\text{tot A}^+)^+$ vérifie, pour tout n , la condition suivante : $\epsilon_{n_*} L^{1,n_*} \xrightarrow{\sim} R\epsilon_{n_*} L^{1,n_*}$ dans $D^+(A(-1))$.

On déduit aussitôt de 3.2.12 que ces foncteurs ϵ^* et R_{ϵ_*} forment encore une paire de foncteurs adjoints.

3.2.16. Les catégories D(A(n)) forment de façon naturelle une catégorie cofibrée sur $(\Delta)^+$. Pour chaque K dans $D(\text{tot }A^+)$, les $\text{Gr}_L^n K$ forment une section de cette catégorie cofibrée sur $(\Delta)^+$. Si K est de la forme $\epsilon^* K_{-1}$, avec $K_{-1} \in \text{Ob } DA(-1)$, cette section est cocartésienne : c'est le système des $p(\epsilon_n)^* K_{-1}$. Vu le contexte où nous sommes, nous dirons <u>cartésien</u> plutôt que cocartésien, et on appellera <u>cartésien</u> un objet K de $D(\text{tot }A^+)$ tel que les $\text{Gr}_L^n K[n]$, munis des θ_1 -applications définies en 3.2.8, forment une section cartésienne du système des D(A(n)), i.e. tels que pour tout i les $H^1(\text{Gr}_L^n K[n])$ soient une section cartésienne de A^+ sur $(\Delta)^+$.

Théorème 3.2.17 . Outre les hypothèses de 3.2.6 et 3.2.15, supposons que

- a) Le foncteur $A \longmapsto (\epsilon_n^* A)_{n \geq 0}$ est une équivalence de catégories de A(-1) avec la catégorie des sections cartésiennes de A^+ sur $(\Delta)^+$.
- b) Pour tout A dans A(-1), identifié à l'objet A[0] \underline{de} D⁺(A(-1)), le morphisme d'adjonction

$$A \longrightarrow R_{\varepsilon_* \varepsilon} A$$

est un isomorphisme.

Alors, les foncteurs ϵ^* et R_{ϵ_*} sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre de $D^+(A(-1))$ avec la catégorie des objets cartésiens de $D(\text{tot }A^+)^+$.

Nous allons vérifier que pour K dans $D^+(A(-1))$ (resp. L un objet cartésien de $D(\text{tot A}^+)^+$, les morphismes d'adjonction respectifs

$$(3.2.17.1) a: K \longrightarrow Re_* \epsilon^* K$$

$$(3.2.17.2) \qquad \underline{b} : \epsilon^* R \epsilon_* L \longrightarrow L$$

sont des isomorphismes. Les objets K (resp. L) tels que (3.2.17.1) (resp.(3.2.17.2)) soit un isomorphisme forment une sous-catégorie triangulée de D⁺(A(-1)) (resp. D(tot A⁺)⁺). Par hypothèse, (3.2.17.1) est un isomorphisme pour K de la forme A[O]. Par dévissage, c'est donc un isomorphisme pour tout K dans D^b(A(-1)). Enfin, pour tout i , $\tau_{\leq i} R_{\epsilon_k} \epsilon^* K$ ne dépend que de $\tau_{\leq i} K$ et (3.2.17.1) est donc un isomorphisme pour tout K dans D⁺(A(-1)).

Ceci suffit à assurer que ϵ^* est une équivalence de $D^+(A(-1))$ avec son image dans $D(\text{tot }A^+)^+$, et que pour L dans l'image le morphisme d'adjonction (3.2.17.2) est un isomorphisme. En effet, pour $L = \epsilon^* K$, l'isomorphisme $\epsilon^* K \xrightarrow{\sim} L$ correspond par adjonction à un isomorphisme $K \xrightarrow{\sim} R\epsilon_* L$.

Si L dans D(tot A[†]) [†] est cartésien, pour chaque i , la section $\operatorname{H}^{\dot{\mathbf{1}}} L^{n}$, * de A[†] sur (Δ) [†] est cartésienne, donc provient par hypothèse de hⁱ dans A(-1). Définissons la filtration canonique de L par ($\tau_{\preceq \dot{\mathbf{1}}} L$), ** = $\tau_{\preceq \dot{\mathbf{1}}} (L^{n}$, **) . On dispose alors, dans D(tot A[†]) [†], de trianques distingués

$$\rightarrow \tau_{< i-1} \stackrel{L}{\longrightarrow} \tau_{< i} \stackrel{L}{\longrightarrow} \epsilon^* (h^i [-i]) \longrightarrow .$$

Si h i = 0 pour |i| assez grand, on en conclut par dévissage que (3.2.17.2) est un isomorphisme, i.e. que L est dans l'image de ϵ^* . Enfin, $\tau_{<\underline{i}}(\epsilon^*R\epsilon_*L)$ ne dépend que de $\tau_{<\underline{i}}L$, et de ce que (3.2.17.2) est un isomorphisme pour les $\tau_{<\underline{i}}L$ résulte le cas général.

3.2.18. Preuve de 3.2.4. Avec les notations de 3.2.5, les catégories de faisceaux de \mathcal{O} -modules sur les $U^{\hat{\Delta}n}$ (n \geq 1) sont les fibres d'une catégorie fibrée et cofibrée A sur (Δ), vérifiant les hypothèses de 3.2.6 et 3.2.15. La catégorie A(-1) est celle des faisceaux de \mathcal{O} -modules sur S. Les hypothèses de 3.2.17 sont également vérifiées : (a) exprime le caractère local des faisceaux, et (b), prouvé dans R. Godement (théorie des faisceaux) ou SCA4 VIB est la source de la suite spec-

trale de Leray pour un recouvrement ouvert.

13

D'après 3.2.9,le système (K^n) de 3.2.5 provient d'un objet de $D(\text{tot A}^+)^+$; d'après 3.2.17, il provient donc de $D^+(S)$, comme promis.

3.2.19. Application : généralisation de 2.1.4.

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal O$, $\mathcal S$ une partition localement finie de X en parties localement fermées et $p: \mathcal S \longrightarrow \mathbb Z$ une fonction bornée. Définissons ${}^pD^{\leq O}(X, \mathcal O)$ et ${}^pD^{\geq O}(X, \mathcal O)$ comme en 2.1.2.

Procédant comme en 2.1.4, on se ramène à vérifier que ${}^pD^{+<O}(x,0):={}^pD^{-O}(x,0)$ on $D^+(x,0)$ et ${}^pD^{-O}(x,0)$ définissent une t-structure sur $D^+(x,0)$. Supposons d'abord la partition S finie, et prouvons 3.2.20 par induction sur le nombre N de strates. La différence d'avec 2.1.3 est qu'on ne suppose pas chaque adhérence de strate réunion de strates. Pour $N \le 1$, on obtient un décalé de la t-structure naturelle et 3.2.20 et clair. Pour N > 1, chaque point x est contenu dans une strate S et admet un voisinage ouvert U tel que $U \cap S$ soit fermé dans U. Pour $V \subset U$ ouvert, l'hypothèse de récurrence s'applique aux partitions traces de S sur V-S et $V \cap S$, et 1.4.10 montre que $({}^pD^{+<O}(V,0),{}^pD^{>O}(V,0))$ est une t-structure sur $D^+(V,0)$. Pour achever la récurrence, ainsi que pour passer du cas où S est fini au cas général, il reste à vérifier l'assertion suivante

Par localisation, on vérifie l'analogue de 2.1.21, et ses corollaires. En particulier, les $\mathcal{C}_V = {}^p \mathcal{D}^{+ \leq o}(\mathbb{V}, \emptyset) \cap {}^p \mathcal{D}^{\geq o}(\mathbb{V}, \emptyset)$ forment un champ – donc un champ en catégories abéliennes – et \mathcal{C}_X est une catégorie abélienne.

L'axiome 1.3.1 (i) des t-structures résulte de 2.1.21, et l'axiome 1.3.1 (ii) est trivial. Prouvons 1.3.1 (iii). Soit K dans

Il figure dans un triangle (A,K,B). Localement - et donc globalement - A est dans $D^{+<0}(X,0)$ et B dans $D^{>0}(X,0)$. Ceci vérifie 1.3.1 (iii).

3.3. Cohomologie entière.

3.3.1. Dans la catégorie dérivée $D(\mathbb{Z})$ de la catégorie des groupes abéliens, le foncteur $D: K \mapsto DK = R \text{Hom}(K, \mathbb{Z})$ induit une autodualité de la sous-catégorie $D_{\mathbf{C}}(\mathbb{Z})$ de $D(\mathbb{Z})$ formée des K tels que les $H^{\dot{\mathbf{I}}}K$ soient de type fini. Cette autodualité ne préserve pas la t-structure naturelle n: elle échange n et n^* , donnée par

$$n^*D^{\leq 0} = \{K \mid H^iK = 0 \text{ pour } i > 1, \text{ et } H^iK \text{ est de torsion}\}$$

$$\stackrel{*}{\text{n}} \text{D}^{\geq \text{O}} = \{ \text{K } \mid \text{H}^{\overset{\circ}{\text{I}}} \text{K = O pour i < O, et } \text{H}^{\text{O}} \text{K est sans torsion} \}$$

3.3.2. Pour tout espace topologique X , définissons une t-structure n^+ sur $D\left(X,Z\!\!\!/\right)$ par

$$n^{+}D^{\leq 0} = \{K \mid H^{1}K = 0 \text{ pour } i > 1, \text{ et } H^{1}K \otimes Q = 0\}$$

$$n^{+}$$
 $D^{>0} = \{K \mid H^{1}K = 0 \text{ pour } i < 0, \text{ et } H^{0}K \text{ est sans torsion}\}$

Le foncteur $\tau_{<0}$ de cette t-structure se déduit du foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux dans elle-même qui à un complexe K attache le sous-complexe K' suivant de K:

$$K^{i} = K^{i}$$
 pour $i < 0$, $K^{i} = 0$ pour $i > 1$, et

$${\rm K^{\prime}}^{\, 1}$$
 = image inverse dans ${\rm Ker}({\rm d}) \subset {\rm K}^{\, 1}$ de la torsion de ${\rm H}^{\, 1}{\rm K}$.

3.3.3. Si X est une variété topologique purement de dimension d , les t-structures n (naturelle) et n⁺ induisent des t-structures sur la sous-catégorie $D_{\text{LC}}(X,\mathbb{Z})$ de $D(X,\mathbb{Z})$ formée des K tels que les H^1K soient localement constants de type fini. On déduit de 3.3.1 que, à un décalage de d près, ces t-structures sont échangées par la dualité de Verdier $D: K \longmapsto R \; Hom(K, \text{or } [-d])$ sur X : celle-ci échange ${}^nD^{\leq O}$ et ${}^{n^+}D^{\geq -d}$.

3.3.4. Pour X un espace stratifié comme en 2.1.1, et $0=\mathbb{Z}$, on définit une t-structure $(\stackrel{p^+}{D^{-0}}(X,\mathbb{Z}),\stackrel{p^+}{D^{-0}}(X,\mathbb{Z}))$ sur $D(X,\mathbb{Z})$ en recollant les t-structures $(\stackrel{n^+}{D^{-p}}(S),\stackrel{n^+}{D^{-p}}(S))$ des strates. Le formalisme 2.1.3-2.1.11 s'applique (dans 2.1.11, prendre le $\tau_{<i}$ au sens n^+).

Si (X,S) vérifie les hypothèses de 2.1.13, cette t-structure en induit une sur $D_{\mathbf{C}}^+(X,\mathbb{Z})$, et 2.1.14 (passage à une stratification plus fine) reste valable. Les t-structures de perversité p et p⁺ sur $D_{\mathbf{C}}^+(X,\mathbb{Z})$ se déterminent l'une l'autre. Omettant (X,\mathbb{Z}) de la notation, on a en effet, pour $K\in D_{\mathbf{C}}^+$, les équivalences :

(i)
$$K \in P^+ D^{\leq 0} \iff K \in P D^{\leq 1} \text{ et } PH^1K \text{ de torsion}$$

(ii)
$$\text{K } \in \text{ } ^{p^+} \text{D}^{\geq 0} \iff \text{K } \in \text{ } ^{p} \text{D}^{\geq 0} \text{ et } \text{ } ^{p} \text{H}^{0} \text{K} \text{ sans torsion}$$

(iii)
$$K \in {}^{p}D^{\leq 0} \iff K \in {}^{p^{+}}D^{\leq 0} \text{ et } {}^{p^{+}}H^{0}K \text{ divisible}$$

(iv)
$$K \in {}^{p}D^{\geq 0} \iff K \in {}^{p^{+}}D^{\geq -1}et {}^{p^{+}}H^{-1}K \text{ de torsion.}$$

Dans (i)-(iv), de torsion signifie : il existe n \neq 0 tel que l'endomorphisme "multiplication par n" est zéro ; sans torsion (resp. divisible) signifie que pour tout n \neq 0 c'est un monomorphisme (resp. épimorphisme). De ces équivalences résulte que pour qu'un foncteur exact T : $D_{\mathbf{C}}^{+}(X,\mathbf{Z}) \longrightarrow D_{\mathbf{C}}^{+}(X',\mathbf{Z})$ soit t-exact à droite pour les t-structures de perversité p , il faut et il suffit qu'il le soit pour celles de perversité p^{+} .

Pour (X,S) de plus triangulable, par exemple algébrique réel muni d'une stratification de Whitney, la dualité de Verdier échange les t-structures de perversité p et $(p^*)^+$ sur $D_{_{\bf C}}(X,{\mathbb Z})$. C'est une conséquence formelle de 3.3.3 et de ce que D échange i et i , pour i l'inclusion d'une strate.

Tout ce qui précède reste valable pour $\ensuremath{\mathbb{Z}}$ remplacé par un anneau de Dedekind R .

3.35. Pour X un schéma de type fini sur C , on peut passer à la limite sur les stratification algébriques, comme en 2.2.1. Pour X un schéma de type fini sur un corps k , et ℓ premier à la caractéristique de k , on peut en faire de même en \mathbb{Z}_{ℓ} -cohomologie, pour autant qu'on dispose d'une catégorie dérivée convenable (cf. 2.2.14-2.2.16).

4. LA PERVERSITÉ AUTODUALE : PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

La plupart des résultats vaudraient aussi en \mathbb{Q}_{ℓ} , \mathbb{Z}_{ℓ} ou en \mathbb{Z}/ℓ^n , en particulier en \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie. On peut aussi remplacer \mathbb{Q}_{ℓ} par une extension finie \mathbb{E}_{λ} , \mathbb{Z}_{ℓ} par l'anneau de valuation V_{λ} correspondant, et \mathbb{Z}/ℓ^n par un quotient fini R de V_{λ} . Enoncer toutes ces variantes eut abouti à rendre le texte illisible. Nous avons préféré nous limiter à l'une d'entre elles : coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$. Les preuves procèdent souvent par réduction au cas des faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -modules, et la réduction est souvent laissée au lecteur. Pour les effectuer, il se rappellera que les foncteurs T de restriction des scalaires (de V_{λ} à \mathbb{Z}_{ℓ}) et d'extension des scalaires de V_{λ} à un quotient fini, par exemple de \mathbb{Z}_{ℓ} à \mathbb{Z}/ℓ^n , sont conservatifs, et que K est dans $\mathbb{P}_{\mathbb{D}^{4O}}$ si et seulement si TK est dans $\mathbb{P}_{\mathbb{D}^{4O}}$. Voir aussi 2.2.17, 2.2.18.

Le lecteur qui voudrait utiliser les résultats donnés ici pour d'autres coefficients que $\,\overline{\varrho}_{_{\chi}}\,$ devra prendre garde aux difficultés suivantes.

- (a) En $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ -cohomologie, la perversité autoduale $\mathbf{p}_{1/2}$ donne lieu à deux t-structures $[\mathbf{p}_{1/2}]$ et $[\mathbf{p}_{1/2}^{+}]$ (3.3), échangées par dualité.
- (b) Le théorème 4.3.1 est faux en \mathbb{Z}_{ℓ} -cohomologie, déjà pour X un point : la catégorie des faisceaux $[\mathbf{p}_{1/2}]$ -pervers (resp. $[\mathbf{p}_{1/2}^+]$ pervers) est seulement noethérienne (resp. artinienne).
- (c) 4.5 n'a de sens que pour un corps de coefficients.
- (d) Les produits tensoriels ont demeilleures propriétés d'exactitude pour un corps de coefficients; par exemple, 4.2.8 requiert un corps de coefficients.

Rappelons (cf. 2.2.11) que, pour la perversité autoduale $p_{1/2}$, un <u>faisceau pervers</u> sur X est un objet K de $D^b_{\bf C}(X,\overline{\bf Q}_{\underline{k}})$ tel que pour tout point (fermé ou non) x de X, posant $\dim(x)=\dim\{x\}=\deg \operatorname{tr}(k(x)/k)$, et notant $i_{_{\bf X}}$ l'inclusion de x dans X, on ait

(4.0.1)
$$H^{i}i_{x}^{*}K = 0$$
 pour $i > -dim(x)$ et

(4.0.2)
$$H^{i}i_{x}^{!}K = 0$$
 pour $i < -dim(x)$.

La condition (4.0.1) caractérise ${}^pD_c^{\leqslant o}$, et (4.0.2) caractérise ${}^pD_c^{\geqslant o}$. La condition (4.0.1) équivaut à ce que pour tout i on ait

$$(4.0.1') dim Supp HiK < -i$$

(d'où en particulier $H^{i}K = 0$ pour i > 0).

La perversité $p_{1/2}$ étant autoduale, la dualité de Verdier échange $p_{D_{C}^{\geqslant 0}}$ et $p_{D_{C}^{\leqslant 0}}$. Elle induit une anti-autoéquivalence de la catégorie des faisceaux pervers.

(4.0.3). Notation . Pour K dans $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ et tout schéma Z audessus de X: u: Z \to X, nous écrirons $H^i(Z,K)$ pour le groupe d'hypercohomologie $H^i(Z,u^*K)$.

4.1. Morphismes affines

Le théorème suivant reformule le théorème SGA4 XIV 3.1 de M. Artin.

 $\frac{\text{Th\'eor\`eme}}{\text{Rf}_{_{\underline{\Psi}}}: \text{D}^{b}_{_{\mathbf{C}}}(\textbf{X}, \overline{\textbf{Q}}_{_{\underline{V}}}) \ \rightarrow \ \text{D}^{b}_{_{\mathbf{C}}}(\textbf{Y}, \overline{\textbf{Q}}_{_{\underline{V}}}) \ \underline{\text{est}} \ \text{t-exact \`a droite}.}$

On se ramène à prouver l'énoncé analogue en $\mathbb{Z}/\ \ell$ -cohomologie (cf. 4.0).

Si le faisceau F est constructible, l'entier d(F) que M. Artin attache à F est le plus petit entier d tel que F , vu comme objet de la catégorie dérivée, soit dans ${}^pD_C^{<d}$. Pour K constructible dans la catégorie dérivée, $d(K) := \sup(i+d(H^iK))$ est de même le plus petit d tel que K soit dans ${}^pD_C^{<d}$. Pour que K soit dans ${}^pD_C^{$

il faut et il suffit que les $H^iK[-i]$ le soient. Pour vérifier que Rf_* envoie ${}^pD_C^{\leqslant o}(X)$ dans ${}^pD_C^{\leqslant o}(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour tout faisceau F avec $d(F)_{\leqslant}d$, on a $d(R^if_*F)_{\leqslant}d$ -i. C'est ce qu'affirme SGA4 XIV 3.1.

Par application de la dualité de Verdier, le théorème 4.1.1 se dualise en le

Corollaire 4.1.2. Sous la même hypothèse, Rf, est t-exact à gauche.

Nous noterons p_{f} et p_{f} les foncteurs p_{h} p_{f} et p_{h} des faisceaux pervers sur p_{f} dans les faisceaux pervers sur p_{f} des mier est exact à droite, le second à gauche. Pour le composé p_{f} de deux morphismes affines, on a

$$p(fg)_* = p_{f_*} p_{g_*} \text{ et } p(fg)_! = p_{f_!} p_{g_!}$$
 (1.3.17) (iv)

Nous écrirons f_* et $f_!$ pour Rf_* et $Rf_!$.

En effet, f_* (:= Rf_*) est t-exact à gauche (2.2.5) et à droite (4.1.7). Le cas de f_* est dual (2.2.5 et 4.1.2).

Supposons k algébriquement clos. Pour Y = Spec(k) , 4.1.1 fournit le corollaire SGA4 XIV 3.2 :

<u>Corollaire</u> 4.1.4 . <u>Pour</u> X <u>affine sur</u> k <u>algébriquement clos</u>, <u>et</u> tout faisceau étale F sur X , $\operatorname{H}^{\mathbf{i}}(X,F) = O$ pour i > dim X .

Plus généralement, on a

En effet, u^*K est dans $\overset{p}{D_c^{< O}}(Z)$ (analogue de 2.2.5) et on applique 4.1.1 à la projection de Z sur Spec(k).

Ce corollaire admet la réciproque suivante.

Réciproque 4.1.6. Supposons k algébriquement clos, et soit K

Nous vérifierons d'abord le

Soient $f_1,\ldots,f_d\in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ tels que le sous-schéma S de X défini par les équations $f_1=0$ soit fini non vide. Si $F\neq 0$, on a $H_S^{2d}(X,F)\simeq (F\mid S)$ (-d) $\neq 0$ (pureté), et la suite exacte

$$H^{2d-1}(x-s,F) \longrightarrow H_S^{2d}(x,F) \longrightarrow H^{2d}(x,F)$$

montre que $\text{H}^{2d-1}(\text{X-S,F}) \neq 0$. En effet, d'après 4.1.4, $\text{H}^{2d}(\text{X,F}) = 0$ puisque 2d > d. Recouvrons X-S par les ouverts $\text{U}_i := \text{X}[\text{1/f}_i]$ et, pour $\text{I} \subset [\text{1,d}]$, posons $\text{U}_{\text{I}} = \bigcap_{i \in \text{I}} \text{U}_i$. Les U_{I} sont affines, et dans la suite spectrale de Čech

$$\mathtt{E}_{1}^{pq} = \bigoplus_{|\mathtt{I}|=p+1} \mathtt{H}^{q}(\mathtt{U}_{\mathtt{I}},\mathtt{F}) \Rightarrow \mathtt{H}^{p+q}(\mathtt{X-S},\mathtt{F}) \qquad ,$$

on a donc $E_1^{pq}=0$ pour q>d. On a aussi $E_1^{pq}=0$ pour p>d-1. Le terme E_1^{d-1},d est le seul qui contribue au H^{2d-1} ; il est donc non nul : on a

$$H^{d}(X[(\Pi f_{i})^{-1}],F) \neq 0$$

4.1.8. Preuve de 4.1.6. Soit F_i (0 \leq i \leq dim X) une suite croissante de fermés de X , de dernier terme X . Posons $F_{-1} = \emptyset$. On suppose la suite F_* choisie de telle sorte que $W_i = F_i - F_{i-1}$ (avec la structure réduite) soit lisse purement de dimension i et que les H^j K soient lisses sur les W_i . Prouvons par récurrence descendante sur i que, sur $U_i = X - F_{i-1}$, K est dans D^{-i} (pour la t-structure naturelle).

L'hypothèse de récurrence : "K|U est dans D^-j pour j > i" est vide pour i = dim X . Elle assure que, sur U , $\tau_{\leq -i}$ K est dans $p_D \otimes p_{\leq 0}$, et que pour j > -i, $p_d \otimes p_d \otimes p_d$

$$\mathtt{H}^{\mathsf{j}}(\mathtt{V}, \tau_{<-\mathtt{i}}\mathtt{K}) \; \longrightarrow \; \mathtt{H}^{\mathsf{j}}(\mathtt{V}, \mathtt{K}) \; \longrightarrow \; \mathtt{H}^{\mathsf{j}}(\mathtt{V}, \tau_{>-\mathtt{i}}\mathtt{K}) \; \longrightarrow \; .$$

D'après 4.1.5, $H^{j}(V,\tau_{\leftarrow i}K)=0$ pour j>0. L'hypothèse $H^{j}(V,K)=0$ pour j>0 fournit donc que pour j>0

$$H^{j}(V,\tau_{>-i}K) = H^{j}(V \cap W_{i},\tau_{>-i}K) = 0$$
.

D'après 4.1.4, le terme E_2 de la suite spectrale

と思な

$$E_2^{pq} = H^p(V \cap W_i, H^q(\tau_{>-i}K)) \Rightarrow H^{p+q}(V \cap W_i, \tau_{>-i}K)$$

est nul pour p > i . Si $H^{j}(\tau_{>-i}K) = 0$ pour j > q , on a donc

$$H^{i}(V \cap W_{i}, H^{q}(\tau_{>-i}K)) = H^{i+q}(V \cap W_{i}, \tau_{>-i}K)$$

(nul si q > -i). Posons $L = H^q(\tau_{>-i}K)$. C'est un faisceau lisse sur W_i et il s'agit, de l'hypothèse $H^i(V \cap W_i, L) = 0$ pour tout $V \subset U_i$ affine, de déduire que L = 0. C'est clair pour i = 0. Supposons donc $i \geq 1$. Si L était non nul, il existerait $V_1 \subset U_i$, affine, tel que $L \mid V_1 \cap W_i$ soit non nul. D'après 4.1.7 appliqué au composantes irréductibles de $V_1 \cap W_i$, il existerait $f_1 \in \Gamma(V_1 \cap W_i, 0)$ tel que $H^i(V_1 \cap W_i[1/f_1], L) \neq 0$. Ce f_1 se relève en $f \in \Gamma(V_1, 0)$ et, pour $V = V_1[1/f]$, on a $H^i(V \cap W_i, L) \neq 0$: contradiction.

Remarque 4.1.9 . Pour $k=\mathbb{C}$, l'analogue de 4.1.1 en cohomologie complexe est vrai, et peut se déduire de 4.1.1 grâce aux théorèmes de comparaison. En voici une interprétation partielle, en termes de modules holonomes.

Prenons X lisse purement de dimension d . Sur X , il y a identité entre les notions de faisceau (algébrique) quasi-cohérent à connexion intégrable et de \mathcal{D} -module ,quasi-cohérent comme \mathcal{D} -module (ou comme \mathcal{D} -module ,cela revient au même). A chaque tel faisceau (V, ∇) est associé son complexe de De Rham $\Omega^*(V)$, et, sur $X(\mathbb{C})$, le complexe de De Rham analytique $\Omega^*(V)$ and de composantes les $\Omega^i(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}^{an}$. On sait que, si le \mathcal{D} -module V est holonome, $\Omega^*(V)[d]^{an}$ est un faisceau pervers, et que le foncteur $V \mapsto \Omega^*(V)[d]^{an}$ induit une équivalence de la catégorie des \mathcal{D} -modules holonomes à singularités régulières (y compris à l'infini) avec celle des faisceaux pervers.

Si $f: X \hookrightarrow Y$ est un plongement ouvert dans Y lisse purement

de dimension d , via cette équivalence, pf_* correspond au foncteur image directe de faisceaux quasi-cohérents (la connexion suit). Si f est en outre affine, il est exact, comme prévu par 4.1.3.

(ii) Si G est un faisceau pervers sur U, j $_1$ G et j $_*$ G sont pervers.

(iii) Si F est un faisceau pervers sur X, i*F est dans ${}^pD_c^{[-1,0]}$, et i*F dans ${}^pD_c^{[0,1]}$. On dispose de suites exactes de faisceaux pervers vers

$$(4.1.10.1) \qquad 0 \rightarrow i_*^{p} H^{-1} i^* F \rightarrow j_1 j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_*^{p} H^0 i^* F \longrightarrow 0$$

$$(4.1.10.2) \quad 0 \rightarrow i_*^{p} H^0 i^! F \longrightarrow F \longrightarrow j_* j^* F \rightarrow i_*^{p} H^1 i^! F \longrightarrow 0 \quad .$$

L'assertion (i) est un cas particulier de 4.1.3. Les suites exactes longues de cohomologie perverse des triangles $(j_!j^*F,F,i_!i^*F)$ et $(i_*i^!F,F,j_!j^*F)$ fournissent (4.1.10.1), (4.1.10.2) et la nullité des ${}^{p}H^{\dot{1}}i_!i^*F = i_*{}^{p}H^{\dot{1}}i^*F$ (resp. ${}^{p}H^{\dot{1}}i_!i^!F = i_*{}^{p}H^{\dot{1}}i^!F)$ pour $i \neq -1,0$ (resp. 0,1) donc (ii).

4.11.Prenons dans (4.1.10.1) F de la forme j_*G . On obtient pour les faisceaux de cohomologie perverse de i^*j_*G une suite exacte

$$(4.1.11.1) \qquad 0 \rightarrow i \quad {}^{p}H^{-1}i^{*}j_{*}G \rightarrow j_{*}G \rightarrow j_{*}G \longrightarrow i \quad {}^{p}H^{0}i^{*}j_{*}G \rightarrow 0 \quad .$$

Si on applique (4.1.10.2) à $F = j_1G$, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow i_{*}^{p} H^{0} i^{!} j_{!} G \rightarrow j_{!} G \longrightarrow j_{*} G \longrightarrow i_{*}^{p} H^{1} i^{!} j_{!} G \rightarrow 0 ,$$

qui, via l'isomorphisme (l.4.6.4) de i^*j_*G avec $i^!j_!G[l]$, coincide avec (4.1.11.1), sauf que la flèche $j_*G \to i_*^pH^Oi^*j_*G$ est changée de signe.

$$(4.1.12.1)$$
 $i^*j_*G[-1] = {}^{p}H^{-1}i^*j_*G = {}^{p}H^{0}i^!j_*G$

$$(4.1.12.2) i!j_{*}G[1] = {}^{p}H^{o}i^{*}j_{*}G = {}^{p}H^{1}i!j_{*}G$$

La suite exacte (4.1.11.1) fournit deux suites exactes courtes

$$(4.1.12.3) \quad 0 \longrightarrow i_{*}^{p} H^{-1} i_{*}^{*} j_{*} G \longrightarrow j_{!} G \longrightarrow j_{!*} G \longrightarrow 0$$

$$(4.1.12.4) \qquad 0 \longrightarrow j_{1*}G \longrightarrow j_{*}G \mapsto i_{*}^{p}H^{O}i^{*}j_{*}G \rightarrow 0$$

Appliquant i* et i! à (4.1.12.3) et (4.1.12.4) respectivement, et utilisant que $i^*j_!=i^!j_*=0$, on obtient (4.1.12.1) et (4.1.12.2), donc la perversité voulue.

Remarque 4.1.13: Le triangle fonctoriel K \longmapsto (j₁j*K,K,i_{*}i*K) peut se préciser en un foncteur T de $D_C^b(X,\mathbb{Q}_{\ell})$ dans $DF_C^b(X,\mathbb{Q}_{\ell})$ tel que, avec la notation 3.1.7, GTK soit le complexe $j_1j^*K \longrightarrow K$, réduit aux degrés -1 et 0. On a ω TK $\stackrel{\sim}{\longrightarrow}$ i_*i^*K , pour un isomorphisme tel que K = G^O TK \longrightarrow ω TK \longrightarrow i_*i^*K soit la flèche d'adjonction. Pour F pervers, TF est un complexe filtré bête, et on obtient un isomorphisme de i_*i^*F avec l'objet de $D_C^b(X,\mathbb{Q}_{\ell})$ défini par le complexe de faisceaux pervers suivant :

$$i_1i^*F = [j_1j^*F \longrightarrow F]$$
 (degrés -1 et 0).

La suite exacte à quatre termes déduite par 3.1.14 de cet isomorphisme coincide avec (4.1.10.1) où la flèche de connexion serait changée de signe.

De même, K \longmapsto $(i_*i^!K,K,j_*j^*K)$ se précise en K \longmapsto TK , avec GTK = le complexe K \mapsto j_*j^*K , réduits aux degrés O et l , avec ω TK = $i_*i^!K$. De là, pour F pervers, un isomorphisme

$$i_*i^!F = [F \rightarrow j_*j^*F]$$
 (degrés 0 et 1)

qui fournit (4.1.10.2) aux signes près.

4.2. Exactitudes et adjonctions.

4.2.1. Si T: $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ est un foncteur exact entre catégories triangulées munies de t-structures, on dit que T est d'amplitude cohomologique [a,b] $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ si $T\mathcal{D}_1^{<0} \subset \mathcal{D}_2^{<bs}$ (pour $b \ne \infty$) et que $T\mathcal{D}_1^{>0} \subset \mathcal{D}_2^{>a}$ (pour $a \ne -\infty$), i.e. si T[b] est t-exact à droite (pour $b \ne \infty$) et que T[a] est t-exact à gauche (pour $a \ne -\infty$). Si T est d'amplitude cohomologique bornée, cela revient à demander que pour A dans $\mathcal{C}_1 = \mathcal{D}_1^{<0} \cap \mathcal{D}_1^{>0}$, les H^1TA soient nuls pour i $\not\in$ [a,b].

4.2.2. Soit $f:X\longrightarrow Y$ un morphisme entre schémas de type fini séparés sur un corps k. Dans ce n°, nous donnons des estimations de l'amplitude cohomologique des foncteurs usuels, attachés à f , reliant $D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_{\hat{\chi}})$ et $D^b_c(Y,\overline{\mathbb{Q}}_{\hat{\chi}})$, et pour la t-structure de perversité $P_{1/2}$.

4.2.3. Si Y est recouvert par des ouverts affines V tels que chaque $f^{-1}V$ soit recouvert par (d+1) ouverts affines, f_* est d'amplitude cohomologique \leq d , et f_* d'amplitude cohomologique \geq -d.

Les deux énoncés sont duaux. Ils sont locaux sur Y , de sorte qu'on peut supposer Y affine, et X recouvert par d+l ouverts affines. L'assertion pour \mathbf{f}_* résulte alors de 4.1.l et de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement ouvert.

4.2.4. Si la dimension des fibres de f est \leq d , on a les estimations suivantes pour l'amplitude cohomologique :

$$f_! : \leq d$$
 $f^! : \geq -d$

$$f^* : < d$$
 $f_* : > -d$

La dualité échange les deux assertions de chaque diagonale et 1.3.17 (iii), appliqué aux paires de foncteurs adjoints $(f_![d], f^![-d])$, $(f^*[d], f_*[+d])$ montre que les deux assertions dans chaque ligne sont équivalentes. Il suffit donc de considérer f^* , où l'estimation résulte aussitôt de (4.0.1) et de ce que, pour x dans X, $\dim(x) \leq \dim f(x) + d$.

Remarque . Le même résultat vaut en Z-cohomologie, pour les t-structures $p_{1/2}$ et $p_{1/2}^+$. La même démonstration s'applique, si ces deux t-structures sont traitées simultanément. De même pour 4.2.3.

Appliquant 1.3.17 (iii), on obtient les adjonctions suivantes entre foncteurs reliant faisceaux pervers sur $\, \, X \,$ et $\, \, Y \,$.

Adjonctions
$$({}^{p}H^{d}f_{,,}{}^{p}H^{-d}f^{!})$$
 et $({}^{p}H^{d}f^{*},{}^{p}H^{-d}f_{*})$.

Deux cas particuliers utiles sont :

- f propre : f = f est d'amplitude cohomologique [-d,d]
- f lisse de dimension relative d : on a $f^! = f^*[2d](d)$, et

 $\begin{array}{lll} f^*[d] = f^!-d & \text{est donc} & t-\underline{exact} & \text{donnant lieu pour les} \\ faisceaux pervers à une suite de 3 & \underline{foncteurs adjoints} & (^{p_H}{}^df_{\cdot_1}(d) \,, \\ p_H{}^df^*, p_H^{-d}f_{\star_1}) \end{array}$

Proposition 4.2.5. Si f est lisse de dimension relative d , $\frac{\tilde{a}}{1}$ fibres géométriques connexes (et donc par définition non vides), le foncteur t-exact $f^*[d]$ induit un foncteur pleinement fidèle des faisceaux pervers sur Y dans les faisceaux pervers sur X .

Dans la preuve, nous utiliserons le foncteur usuel $\mbox{ f}_{\mbox{ *}}$ pour les faisceaux. Il sera noté $\mbox{ }^{\mbox{O}}\mbox{f}$.

Pour K et L dans $D^b_c(Y, \mathbf{Q}_{\hat{\ell}})$, on a, parce que f est lisse,

$$(4.2.5.1) f^*R \operatorname{Hom}(K,L) \xrightarrow{\sim} R \operatorname{Hom}(f^*K,f^*L) .$$

Pour f quelconque, on aurait plutôt

$$f^!R \text{ Hom}(K,L) \xrightarrow{\sim} R\text{Hom}(f^*K,f^!L)$$
.

Pour K et L pervers, $\underline{RHom}(K,L)$ est dans $\underline{D_c^{\geq O}}$. De même pour $\underline{RHom}(f^*K,f^*L) = \underline{RHom}(f^*K[d],f^*L[d])$. Appliquant $\underline{O_f}_H^O$ à (4.2.5.1), on obtient donc

$$(4.2.5.2) \qquad {}^{\mathsf{O}} \mathsf{f}_{\mathsf{L}}^{\mathsf{f}} \mathsf{H}^{\mathsf{O}} \mathsf{R} \underline{\mathsf{Hom}} (\mathsf{K}, \mathsf{L}) \longrightarrow {}^{\mathsf{O}} \mathsf{f}_{\mathsf{L}} \mathsf{H}^{\mathsf{O}} \mathsf{R} \underline{\mathsf{Hom}} (\mathsf{f}^{\mathsf{K}} \mathsf{K}[\mathsf{d}], \mathsf{f}^{\mathsf{K}} \mathsf{L}[\mathsf{d}]) \ .$$

Admettons provisoirement que pour H sur Y on ait

$$(4.2.5.3) \qquad \qquad H \xrightarrow{\sim} {}^{O}f_{\star}f^{*}H \qquad .$$

De (4.2.5.2), on déduit alors par passage aux sections globales que

$$\Gamma H^{O}R\underline{Hom}(K,L) \xrightarrow{\sim} \Gamma H^{O}R\underline{Hom}(f^{*}K[d],f^{*}L[d])$$
.

Aux deux membres, $R\underline{Hom}$ est dans $D_C^{>0}$, d'où

$$\text{TH}^{O}\text{RHom} = \text{H}^{O}\text{RF}\text{RHom} = \text{H}^{O}\text{RHom} = \text{Hom}$$
, et l'assertion.

La preuve de (4.2.5.3) se ramène au cas des faisceaux d'ensembles. Le morphisme f a localement une section ; ceci permet de supposer que f a une section e . Elle fournit une rétraction à $\mathcal{H} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{H}$, et il reste à véfifier que deux sections locales de $f_*f^*\mathcal{H}$ qui, en tant que sections de $f^*\mathcal{H}$, coı̈ncident sur e , sont égales. Ceci se vérifie fibre par fibre : on est ramené au cas, laissé au lecteur, où Y est un point.

4.2.6. Si u^* est un foncteur exact pleinement fidèle d'une catégorie abélienne A dans une catégorie abélienne B , ayant des adjoints à gauche et à droite $u_!$ et u_* , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) u^* identifie A à une sous-catégorie épaisse (= stable par sous-quotient) de B ;
- (b) pour B dans B , le morphisme d'adjonction $u_1u^*B \longrightarrow B$ est un monomorphisme ;
- (b') pour B dans B , le morphisme d'adjonction B $\to u_{\bigstar}u^{*}B$ est un épimorphisme.

Elles ne sont pas toujours vérifiées. Exemple : $\mathcal{B}=\text{catégorie}$ des morphismes $X\to Y$ dans une catégorie abélienne \mathcal{C} ,

A = sous-catégorie (équivalente à C) des isomorphismes X $\xrightarrow{\sim}$ Y , u* = foncteur d'inclusion, u $_1$ (X \rightarrow Y) = (X $\xrightarrow{\sim}$ X) , u $_1$ (X \rightarrow Y) = =(Y $\xrightarrow{\sim}$ Y) . Si elles sont remplies, et qu'on identifie A à une sous-catégorie pleine de B par u* , chaque objet B de B a un plus grand sous-objet qui soit dans A - à savoir u $_1$ u*B - et un plus grand quotient qui soit dans A - à savoir u $_1$ u*B . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le

Lemme 4.2.6.1 . Si tout objet de A est de longueur finie, et que pour tout objet simple S de A , u^*S est simple, les conditions 4.2.6 (a),(b),(b') sont vérifiées.

Le critère 4.2.6.1 s'applique dans la situation 4.2.5 : on dispose d'une suite de foncteurs adjoints $({}^{p}{\rm H}^{d}{\rm f}_{\,\underline{\,}}(d)\,,{}^{p}{\rm H}^{d}{\rm f}^{*}\,,{}^{p}{\rm H}^{-d}{\rm f}_{\,\underline{\,}})$, l'hypothèse "tout objet de longueur finie" est 4.3.1 (i), et l'image par ${\rm f}^{*}[d]$ d'un objet simple S = j_*_t[dim V]

$$\begin{array}{cccc}
f^{-1}(V) & \longrightarrow & X \\
f & & \downarrow & \downarrow f \\
V & \longrightarrow & Y
\end{array}$$

est $j_{!*}(f^*L[\dim f^{-1}V])$, encore simple : la commutation de $j_{!*}$ au changement de base par f résulte du théorème de changement de base par un morphisme lisse et de la description du type 2.1.11 de $j_{!*}$ déduite de 2.2.4 ; par ailleurs, parce que f est lisse à fibres connexes, l'image inverse sur $f^{-1}V$ d'un système local irréductible sur V est encore irréductible.

Corollaire 4.2.6.2 . Sous les hypothèses de 4.2.5, le foncteur f*[d] des faisceaux pervers sur Y dans les pervers sur X vérifie les conditions équivalentes (a)(b)(b') de 4.2.6.

Pour F un faisceau pervers sur X , le corollaire permet de parler du plus grand sous-faisceau (resp. faisceau quotient) de F qui provient de Y par image inverse. Ce sous-faisceau (resp. quotient) est le $f^*[d]$ de ${}^pH^{-d}f_*F$ (resp. de ${}^pH^{d}f_{+}(d)$).

La démonstration donnée de 4.2.6.2 a l'avantage d'être courte. Elle a le tort de ne pas s'appliquer telle quelle à d'autres perversités que $\rm p_{1/2}$, ou au cas des $\rm Z_{\it l}$ -faisceaux.

- 4.2.7. Pour X_1 et X_2 de type fini sur un corps k, soit \square le produit tensoriel externe $D(X_1)_XD(X_2)\longrightarrow D(X_1\times X_2)$: $(K,L)\longmapsto pr_1^*K \ pr_2^*L$. Divers contextes sont possibles : coefficients \mathbb{Z}/ℓ ; coefficients \mathbb{Z}/ℓ^n , en se restreignant à D^- ou à D_{ctf}^b , coefficients \mathbb{Z}_ℓ ou \mathbb{Q}_ℓ , dans D_c^b , pour k convenable (cf. 2.2),.... Dans tous ces contextes, le produit tensoriel externe commute aux opérations usuelles :
- (a) Pour $\mathbf{f}: \mathbf{X}_1 \longrightarrow \mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{f}_2: \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbf{Y}_2$, on a

12%

$$f_{1*}K \boxtimes f_{2*}L \xrightarrow{\sim} (f_1 \times f_2)_* (K \boxtimes L)$$
.

De même pour $(f_1 \times f_2)_!, (f_1 \times f_2)^*$ et $(f_1 \times f_2)^!$. En particulier, le complexe dualisant pour $X_1 \times X_2$ est le \square des complexes dualisants pour X_1 et X_2 .

(b) Pour K $_1$ et L $_1$ sur X $_1$, et K $_2$, L $_2$ sur X $_2$, on a, si K $_1$ et K $_2$ sont dans D $_c^b$,

$$\frac{\operatorname{R}\operatorname{Hom}\left(\mathsf{K}_{1},\mathsf{L}_{1}\right)}{\operatorname{R}\operatorname{Hom}\left(\mathsf{K}_{2},\mathsf{L}_{2}\right)} \xrightarrow{\sim} \frac{\operatorname{R}\operatorname{Hom}\left(\mathsf{K}_{1} \boxtimes \mathsf{K}_{2},\mathsf{L}_{1} \boxtimes \mathsf{L}_{2}\right)}{\operatorname{R}\operatorname{Hom}\left(\mathsf{K}_{1} \boxtimes \mathsf{K}_{2},\mathsf{L}_{1} \boxtimes \mathsf{L}_{2}\right)}.$$

En particulier, le dual de Verdier $D(K \boxtimes L)$ de $K \boxtimes L$ est le \boxtimes des duaux de Verdier de K et L . De même, trivialement, avec \odot remplaçant $R\underline{Hom}$.

Par des arguments standard (cf. [3] §1), ces énoncés se ramènent à (a) pour les images directes. Factorisant (f_1 , f_2) en (f_1 , Id) \circ (Id, f_2), on peut supposer que f_1 ou f_2 est l'identité. On se ramène par ailleurs au cas de coefficients $\mathbb{Z}/\!\!\!/$. Dans ce cas, et pour f_1

l'identité, le résultat peut se déduire de l'acyclicité locale universelle de $X_1 \to \operatorname{Spec}(k)$, pour tout faisceau de coefficients ([3]2.16).

Soit K_i dans D_C^b sur X_i (i=1,2) et \mathcal{T}_i une stratification de X_i à strates équidimentionelles de réduite lisse sur \overline{k} , telle que, pour $i:S\hookrightarrow X_i$ l'inclusion d'une strate, les $\operatorname{H}^n i^* K_i$ et les $\operatorname{H}^n i^! K_i$ soient lisses. Pour que K_1 soit dans $D_C^{<0}$ (resp. $D_C^{<0}$), il faut et suffit alors que pour toute strate $i:S\hookrightarrow X_i$, on ait $\operatorname{H}^n i^* K_i = 0$ pour $n > -\dim S$ (resp. $\operatorname{H}^n i^! K_i = 0$ pour $n < -\dim S$). Appliquant ce critère à $K_1 \boxtimes K_2$ et à la stratification $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ de $X_1 \times X_2$, on obtient 4.2.8 : utiliser 4.2.7. Il est essentiel ici que la fonction de perversité utilisée soit linéaire.

4.2.9. De même, mais plus simplement, pour K une extension de k, X un schéma de type fini sur k, $X_K := X \times_{\mbox{Spec } k} \mbox{Spec } K$ et ϵ la projection $X_K \to X$, le foncteur ϵ^* commute aux opérations usuelles, et est t-exact. Ceci vaut pour toute perversité, ainsi qu'en \mathbb{Z}_{ℓ} , $\mathbb{Z}/\ell^n,\ldots$ -cohomologie.

4.3. Objets simples.

Théorème 4.3.1 (i). La catégorie des faisceaux pervers sur X est artinienne et noethérienne : tout objet est de longueur finie.

(ii) Si j: V $\stackrel{\longleftarrow}{\leftarrow}$ X est l'inclusion dans X d'une sous-variété irréductible, dont le réduit sur \overline{k} est lisse, et que l est un \mathfrak{P}_{ℓ} -faisceau lisse irréductible sur V (correspondant à une représentation ℓ -adique irréductible de $\pi_1(V)$), alors $j_!$ ℓ [dim V]) est un faisceau pervers simple sur X . Tous les faisceaux pervers simples sont ainsi obtenus.

Ceci ne changeant pas la topologie étale, on peut étendre les scalaires de k à sa clôture parfaite. Supposons donc k parfait. L'hypothèse "réduit sur \overline{k} lisse" peut alors être remplacée par "lisse".

Il faut vérifier (cf. 2.1.9) que pour tout $x \in X-U$, on a $H^{\dot{1}} \overset{*}{x} F = 0$ pour $\dot{1} \geq -\text{dim } x$ et $H^{\dot{1}} \overset{!}{x} F = 0$ pour $\dot{1} \leq -\text{dim } x$. On a dim x < dim X, et les nullités requises valent pour $\dot{1} > -\text{dim } X = -\text{dim } x - (\text{dim } X - \text{dim } x)$ et, par le théorème de pureté cohomologique, pour $\dot{1} < -\text{dim } X + 2\text{codim } x = -\text{dim } x + (\text{dim } X - \text{dim } x)$ respectivement.

Lemme 4.3.3 . Si L est un Φ_{ℓ} -faisceau lisse irréductible sur X irréductible et lisse, le faisceau pervers $F := L[\dim X]$ est simple.

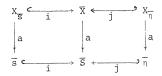
Soit $G \subset F$. Il existe un ouvert de Zariski non-vide $j:U \hookrightarrow X$ de X tel que, sur U, G soit de la forme $M[\dim X]$, pour M un sous-faisceau lisse de L. L'espace X étant normal, la monodromie de L ne change pas par restriction à U, et L|U est encore irréductible. On a donc M=0 ou M=L. Si M=0 (resp. M=L), G (resp. F/G) est à support dans le fermé F=X-U de X. Puisque $F=j_{1*}j^*F$ d'après 4.3.2, F n'a pas de sous-objet (resp. quotient) non-trivial à support dans F (1.4.2.5) : on a G=0 (resp. G=F) et 4.3.3 en résulte.

4.3.4. Prouvons 4.3.1. Que les faisceaux pervers (ii) soient simples résulte de 4.3.3 et d'une double application de (1.4.2.5): au plongement ouvert $V \hookrightarrow \overline{V}$, et au plongement fermé $\overline{V} \hookrightarrow X$. Pour achever la démonstration, il reste à vérifier que tout faisceau pervers sur X est extension successive de ces faisceaux pervers simples. Prouvons le par récurrence noethérienne sur X, de façon à pouvoir supposer, par récurrence, que tel est le cas pour les faisceaux pervers à support $Y \ne X$. Tout faisceau pervers F sur X est sur un ouvert irréductible lisse convenable $j: U \hookrightarrow X$ de la forme $L[\dim U]$, avec L un Φ_{ℓ} -faisceau lisse. De là résulte (cf. 4.1.1]) qu'il se dévisse en faisceaux $j_{1*}L'[\dim U]$, L' sous-quotient irréductible de L, et en faisceaux pervers à support dans le complément de U. L'assertion en résulte.

Remarque 4.3.5 (cf. 4.1.9) : sur $\mathbb C$, on sait que la catégorie des $\mathcal D$ -modules holonomes est de même artinienne et nothérienne (modules holonômes algébriques, sur une variété algébrique lisse, ou pris au sens analytique, sur une variété analytique compacte).

4.4 Cycles évanescents (estimation supérieure).

4.4.1. Soient (S,η,s) un trait hensélien, $k(\overline{\eta})$ une clôture séparable de $k(\eta)$, et $(\overline{S},\overline{\eta},\overline{s})$ le normalisé de S dans $k(\overline{\eta}):\overline{S}$ est le spectre d'un anneau de valuation non discrète ; le groupe de la valuation est \mathbb{Q} . Soient $a:X\longrightarrow S$ un schéma de type fini sur $S,\overline{X}=X\times_S\overline{S}$ et $X_{\overline{\eta}}$ et $X_{\overline{S}}$ les deux fibres de $\overline{X}/\overline{S}$:



Le foncteur $\psi_{\overline{\eta}}$ de la théorie des cycles évanescents est le foncteur i ${}^*j_*: D(X_{\overline{\eta}}) \longrightarrow D(X_{\underline{\eta}})$. Nous nous proposons de montrer que, pour la perversité $p_{1/2}$ de $X_{\overline{\eta}}/{\overline{\eta}}$ et $X_{\overline{s}}/{\overline{s}}$, il envoie ${}^pp_c^{<0}$ dans ${}^pp_c^{<0}$.

Le cas qui nous intéresse le plus est le cas de la $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -cohomologie. Utilisant que R ℓ commute aux opérateurs d'extension et de restriction de l'anneau de coefficients, que ces opérations envoient les unes dans les autres les catégories ${}^{p}D_{c}^{\varsigma_{0}}$, et que, pour K dans $D_{c}^{b}(X,\mathbb{Z}_{\ell})$, si K $\overline{\mathbb{Z}}$ est dans ${}^{p}D_{c}^{\varsigma_{0}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$, alors K est dans ${}^{p}D_{c}^{\varsigma_{0}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$, on ramène successivement le cas de la $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -cohomologie à celui de la E_{ℓ} -cohomologie (E_{ℓ} extension finie de \mathbb{Q}_{ℓ}), de la \mathbb{Q}_{ℓ} -cohomologie, de la \mathbb{Z}_{ℓ} -cohomologie et de la \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie. Travailler en \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie a l'avantage de ne pas requérir le formalisme des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux. Le foncteur $\ell_{\overline{\eta}}$ respecte la constructibilité (SGA4 1/2, Th. finitude, 3.2). Il n'est pas nécessaire de le savoir si, pour Y un schéma de type fini sur un corps, on définit directement ${}^{p}D_{c}^{\varsigma_{0}}(Y,\mathbb{Z}/\ell)$ à l'imitation de M. Artin (SGA4 XIV 2) : c'est la catégorie des complexes K tels que pour tout point (fermé ou non)

 $\underline{\text{Proposition}} \text{ 4.4.2. } \psi_{\overline{\eta}} \quad \underline{\text{envoie}} \quad {}^p D^{\leqslant O}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Z}/{\boldsymbol{\ell}}^n) \quad \underline{\text{dans}} \quad {}^p D^{\leqslant O}(X_{\overline{S}}, \mathbb{Z}/{\boldsymbol{\ell}}^n) \ .$

Par dévissage et passage à la limite inductive, il suffit de montrer que si un faisceau constructible F sur $X_{\overline{\eta}}$ a un support de dimension \leq N , pour tout point géométrique \overline{x} de $X_{\overline{s}}$, localisé en x , on a $(H^i\psi_{\overline{x}}F)_{\overline{x}}=0$ pour $i>N-\dim\{x\}^-$.

Lemme 4.4.3.
$$H^{i} \psi_{\overline{D}} F = O \underline{pour} i > N$$
.

Soit x un point géométrique de $X_{\overline{S}}$. Il suffirait de prendre $x \in X(k(\overline{s}))$. Ecrivons l'hensélisé strict $\overline{X}_{(x)}$ de \overline{X} en x comme limite projective des voisinages étales affines U_{α} de x dans \overline{X} . On a

$$(H^{i}\psi_{\overline{n}}F)_{x} = \underset{\longrightarrow}{\lim} H^{i}(U_{\alpha\overline{n}}, F)$$

Sous le signe $\,{\rm H}^{\dot{1}}$, on peut remplacer $\,U_{\alpha\,\overline{\eta}}\,$ par l'image inverse dans $\,U_{\alpha\,\overline{\eta}}\,$ du support de $\,F$, et on conclut par le théorème de dimension cohomologique des schémas affines SGA4 XIV 3.2.

4.4.4. Il sera commode de prouver un énoncé un peu plus général que 4.4.2. Soient S^h l'hensélisé strict de S, de corps des fractions $k(\eta^h)\subset k(\overline{\eta})$, et $k(\eta^l)$ une quelconque extension de $k(\eta^h)$ dans $k(\overline{\eta})$ contenant toutes les racines d'une uniformisante d'ordre une puissance de ℓ . Remplaçant dans 4.4.1 $k(\overline{\eta})$ par $k(\eta^l)$, on définit S^l,X^l un foncteur ψ_η , de $D(X_{\overline{\eta}})$ dans $D(X_{\overline{S}})$. Nous prouverons l'analogue de 4.4.2 pour ce foncteur.

Le groupe de Galois $Q=Gal(k(\overline{\eta})/k(\eta^*))$ est une limite projective de groupes finis d'ordre premier à ℓ . Le foncteur "invariants sous Q" est donc exact. Pour K' dans $D(X_{\overline{\eta}})$, d'image inverse K dans $D(X_{\overline{\eta}})$, on a

$$(4.4.4.1)$$
 $H_{\psi_n}^{i}K^i = (H_{\eta}^{i}K)^Q$.

La vérification est laissée au lecteur. L'énoncé analogue dans la catégorie dérivée ne nous sera pas nécessaire. L'analogue de 4.4.2 pour ψ_{η} , est conséquence de l'énoncé originel, et de (4.4.4.1). De même, l'analogue de 4.4.3 pour ψ_{η} , résulte de 4.4.3 et(4.4.4.1).

Soit A lisse sur S et \overline{s}_1 un point géométrique générique de $A_{\overline{s}}$ / d'image s_1 dans A_s . Soit S_1 l'hensélisé de A en s_1 . C'est un trait. Soit S_1^h son hensélisé strict (rel. \overline{s}_1). Il s'envoie sur S_1^h et l'image inverse d'une uniformisante de S_1^h est une uniformisante de S_1^h . Le produit fibré $S_1^i = S^i \times S_1^h$ est pour S_1 du type considéré plus haut pour S .

4.4.5. Prouvons 4.4.2 (tel qu'amplifié en 4.4.4). Le problème étant local sur X , on peut supposer, et on suppose, X affine. Soit A_S^d l'espace affine relatif de dimension d sur S . Nous prouverons l'énoncé suivant, dont 4.4.2 résulte formellement : pour tout d , et pour tout morphisme f : X \longrightarrow A_S^d , si le point géométrique x de $X_{\overline{S}}$ a pour image dans $A_{\overline{S}}^d$ le point générique, alors $(H^j\psi_\eta,F)_X=0$ pour j > N-d (F comme sous 4.4.2).

Appliquons 4.4.4 à A_S^d/S :

soit X $_1$ le "localisé" X $\times_{A_S^d} S_1$ de X , et X $_1^t$ déduit de X $_1$ par changement de base de S_1 à S_1^t :

Le morphisme ϵ étant pro-étale, le foncteur $\psi_{\eta^{\,\prime}}$ relatif à X'/S' se localise en le foncteur analogue relatif à X'/S':

$$\psi_{\eta_1^{\bullet}} \varepsilon^* = \varepsilon^* \psi_{\eta_1^{\bullet}}$$

Pour F fermé dans X_{η}^{l} , de dimension $\leq N$, son image inverse dans $(X_{1}^{l})_{\eta_{1}^{l}}$ est de dimension $\leq N-d$. De même, si un point x de $X_{\overline{s}}$ est tel que f(x) soit le point générique de $A_{\overline{s}}^{d}$, i.e. s'il est l'image

d'un point x_1 de $(x_1)_{\overline{s}_1}$, on a $\dim\{x_1\} = \dim\{x\} - d$. Ce décalage de d , et la relation ci-dessus entre cycles proches pour X'/S' et pour X'_1/S'_1 , nous ramènent alors à 4.4.3 (amplifié par 4.4.4) pour X'_1/S'_1 .

Remarque 4.4.5: nous avons déduit 4.4.2 du théorème de dimension cohomologique des schémas affines. Cette présentation est artificielle en ce que, dans SGA4 XIV, ce théorème et une forme de 4.4.2 (cachée dans la preuve de SGA4 XIV 4.5) sont démontrés par un récurrence simultanée sur N.

4.5 Estimations de nombres de Betti.

Le but de ce numéro est 4.5.5, utilisé dans la preuve du théorème de pureté 5.3.4.

- (i) Pour tout i , dim $H^{1}(\widetilde{X},K) \leq C \cdot \prod d_{a}$.
- (ii) Pour i > 0, $\dim H^{i}(\widetilde{X},K) \leq C \cdot \sup \{ \prod_{a \in A} d_{a} \mid |A| = n-i \}$ (où le sup est égal à zéro pour i > n).

Pour que l'énoncé soit vrai pour K , il suffit qu'il le soit pour les $\text{H}^{\dot{J}}K[-\dot{j}]$: on peut supposer K de la forme F[N] , pour F un $\overline{\mathbb{Q}}_{\chi}$ -faisceau dont la dimension du support est $\leq N$. On se ramène du cas des $\overline{\mathbb{Q}}_{\chi}$ -faisceaux à celui des \mathbb{Q}_{χ} -faisceaux, puis des \mathbb{Z}_{χ} -faisceaux (remplacer dim par rang). La formule des coefficients universels (la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{H}^{1}(X,K) \otimes \mathbb{Z}/\ell \longrightarrow \operatorname{H}^{1}(X,K \overset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{1}(\operatorname{H}^{1+1}(X,K),\mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow 0)$$

montre que rg H $^i(\tilde{X},K) \leq \dim_{\mathbb{Z}/\ell} H^i(\tilde{X},K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{Z}/\ell)$ etnous ramène enfin au cas des faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules. Ceci nous débarasse du formalisme ℓ -adique.

Soient donc F un faisceau de Z/1-modules, avec dim Supp F \leq N , K = F[N] , et prouvons 4.5.1 par récurrence sur n .

Le cas n = 0 est laissé au lecteur.

Supposons $n \geq 1$, et soit pr la projection de X sur X_1 .Il existe un ouvert non vide $j: U_1 \hookrightarrow X_1$ de X_1 au-dessus duquel K soit localement acyclique, relativement à pr (SGA4 1/2, finitude,2.13). On le prend $\neq X_1$. Soient encore j l'inclusion dans X de $U = \operatorname{pr}^{-1}(U_1)$ et i celle du fermé complémentaire. Dévissant K par le triangle (j,j^*K,K,i_*i^*K) , on se ramène aux deux cas suivants:

- (a) K est de la forme $(j_!F)[N]$, avec F sur U localement acyclique, relativement à pr ;
- (b) K est à support dans X-U.

Le cas (b) se ramène à celui où K est à support dans $\operatorname{pr}^{-1}(t)$, pour $t \in X_1$ un point fermé convenable. Soient $Y = \operatorname{pr}^{-1}(t) \stackrel{\sim}{\to} \prod_{a \neq 1} X_a$, et $\widetilde{Y} = \prod_{a \neq 1} \widetilde{X}_a$. On a

$$\dim H^{i}(\widetilde{X},K) = d_{1} \cdot \dim H^{i}(\widetilde{Y},K)$$

et 4.5.1 résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à Y .

Supposons K de la forme (a). Notons $j:\widetilde{\mathbb{U}} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{X}}$ et $j:\widetilde{\mathbb{U}}_1 \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{X}}_1$ les images inverses de U et \mathbb{U}_1 dans $\widetilde{\mathbb{X}}$ et $\widetilde{\mathbb{X}}_1$, et soit $\widetilde{\mathbb{pr}}$ la projection de $\widetilde{\mathbb{X}}$ sur $\widetilde{\mathbb{X}}_1$, ou de $\widetilde{\mathbb{U}}$ sur $\widetilde{\mathbb{U}}_1$. Le faisceau F restreint à $\widetilde{\mathbb{U}}$ est encore localement acyclique rel. à $\widetilde{\mathbb{pr}}$, et les $\mathbb{R}^q \widetilde{\mathbb{pr}}_* F$ sont donc localement constants sur $\widetilde{\mathbb{U}}_1$.

Soit la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\widetilde{X}_1, R^q \widetilde{pr}_* K) \Rightarrow H^{p+q}(\widetilde{X}, K)$$

Puisque $R^q\widetilde{pr}_*K=j_!R^{q+N}\widetilde{pr}_*F$ est un faisceau localement constant sur \widetilde{U}_1 , prolongé par zéro, et qu'on a pris $U_1\neq X_1$, donc $\widetilde{U}_1\neq \widetilde{X}_1$, on a $E_2^{pq}=0$ pour $p\neq 1,2$. Il suffit de vérifier les estimations 4.5.1 pour les E_2^{pq} (avec i=p+q) ou, ce qui revient au même et nous sera plus commode, pour E_2^{2q} (et i=q+2) et pour $|\chi(\widetilde{X}_1,R^q\widetilde{pr}_*K)|=|\dim E_2^{1q}-\dim E_2^{2q}|$ (et i=q+1).

Soit t fermé dans U_1 , $\widetilde{t} \in \widetilde{U}_1$ au-dessus de t, Y et \widetilde{Y} comme précédemment et K_1 la restriction de K à $\operatorname{pr}^{-1}(t) \xrightarrow{\sim} Y$. Pour t assez général, on a $\dim(\operatorname{Supp} F \cap \operatorname{pr}^{-1} t) \leq \dim \operatorname{Supp} F - 1$ et $K_1[-1]$

est donc dans ${}^pD_c^{\leqslant 0}(Y,\mathbb{Z}/\ell)$. Le $E_2^{2q}=H_c^2(\widetilde{U}_1,R^q\widetilde{p}r_*K)$ est donné par les coinvariants de la monodromie sur $(R^q\widetilde{p}r_*K)_{\widetilde{+}}=H^q(\widetilde{Y},K_1)$:

$$E_2^{2q} = H^q(\widetilde{Y}, K_1)_{\pi_1}(\widetilde{U}_1, \widetilde{t})^{(-1)} ,$$

d'où dim $E_2^{2q} < \operatorname{rg} R^q$ $\widetilde{pr} K$. Puisque

 $\text{(4.5.1.1)} \quad \text{rg R}^q \widetilde{\text{pr}}_* \, \text{K} = \text{dim H}^q \, (\widetilde{\text{Y}}, \text{K}_1) = \text{dim H}^{q+1} \, (\widetilde{\text{Y}}, \text{K}_1[-1]) \ , \\ \text{1'estimation voulue pour E}_2^{2q} \quad \text{résulte de 1'hypothèse de récurrence.}$

Parce que \widetilde{X}_1 est un revêtement étale de X_1 , qui est propre, ou par la formule d'Euler-Poincaré rappelée plus bas, le $\chi(\widetilde{X}_1, R^q \widetilde{pr}_* K)$ est d_1 fois le χ analogue pour $X_1 \times \overrightarrow{a\neq 1}$ $\widetilde{X}_1 \longrightarrow X_1$. Ceci nous ramène à montrer que si d_1 = 1, i.e. si \widetilde{X}_1 = X_1 - ce que nous supposerons désormais - on a

$$|\chi(X_1, R^1 \widetilde{pr}_* K)| \le \begin{cases} O(\prod_{a \ne 1} d_a) \\ O(\sup\{\prod_{a \in A} d_a | A \subset [2, n] = t \\ |A| = n - (q+1) - 1 = pour | q \ge 0 \end{cases})$$

On a (formule d'Euler-Poincaré, voir [9]) :

$$\chi(\mathbf{X}_1,\mathbf{R}^q \widetilde{\mathbf{pr}}_* \mathbf{K}) \ = \ \chi(\mathbf{U}_1) \cdot \mathrm{rg} \, (\mathbf{R}^q \widetilde{\mathbf{pr}}_* \mathbf{K}) - \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 - \mathbf{U}_1} \, \mathbf{Sw}_{\mathbf{x}} \, (\mathbf{R}^q \widetilde{\mathbf{pr}}_* \mathbf{K}) \quad .$$

L'estimation (4.5.1.1) du rang de $R^q\widetilde{pr}_*K$ - jointe à l'hypothèse de récurrence - suffit pour le premier terme. Pour majorer chacun des conducteurs de Swan $Sw_x(R^q\widetilde{pr}_*K)$, nous appliquerons la théorie des cycles évanescents au trait $(X_{1(x)},\eta,x)$ hensélisé de X_1 en x et à $X_{(x)} \to X_{1(x)}$ et $\widetilde{X}_{(x)} \to X_{1(x)}$ déduits de $X \to X_1$ et $\widetilde{X} \to X_1$ par changement de base. Soit K_1 l'image inverse de K sur $(X_{(x)})_\eta$. A nouveau, $K_1[-1]$ est dans $p_0 \in (X_{(x)\eta}, \mathbb{Z}/k)$. Le complexe $\psi_{\overline{\eta}}K_1[-1]$ sur $X_{(x)x} = pr^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} Y$ est donc dans $p_0 \in (Y, \mathbb{Z}/k)$ (4.4.2) Le complexe analogue sur $\widetilde{X}_{(x)x} = pr^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} \widetilde{Y}$ s'en déduit par image inverse. Ces complexes sont munis d'une action du groupe d'inertie $I = Gal(\overline{\eta}/\eta)$, et en particulier du groupe d'inertie sauvage P , donnant lieu à un isomorphisme équivariant

$$(R^{q}\widetilde{pr}_{*}K)_{\overline{n}} = H^{q}(\widetilde{Y}, \psi_{\overline{n}}K_{1}) = H^{q+1}(\widetilde{Y}, \psi_{\overline{n}}K_{1}[-1])$$

L'action de P sur $\psi_{\overline{n}} K_{\underline{1}}$ se factorise par un quotient fini Q . Il

nous suffirait de savoir que son action sur les $H^i\psi_\eta K_1$ admet une telle factorisation, mais la preuve s'écrit de façon plus claire en regardant $\psi_\eta K_1$ comme étant dans $D(Y,\mathbb{Z}/\ell[Q])$. Soit Sw la représentation de Swan de Q. C'est un $\mathbb{Z}/\ell[Q]$ -module projectif, et le conducteur de Swan est

$$Sw_{x}R^{q} \widetilde{pr}_{*}K := dim Hom_{Q}(Sw, (R^{q}\widetilde{pr}_{*}K)_{\eta})$$
,

et

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Sw},(\operatorname{R}^{\operatorname{q}}\operatorname{\widetilde{pr}}_{*}\operatorname{K})_{\operatorname{\eta}}^{-}) = \operatorname{H}^{\operatorname{q}+1}(\widetilde{Y},\operatorname{\operatorname{\underline{Hom}}}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Sw},\psi_{\operatorname{\eta}}^{-\operatorname{K}}_{\operatorname{1}}[-1])) \quad .$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à Y et $\underline{\operatorname{Hom}}_Q(\operatorname{Sw},\psi_\eta^{-K}_1[-1])$, et son application termine la démonstration.

$$\dim H^{i}(\widetilde{X},K) \leq C \cdot \prod d_{a}$$

On se ramène par décalage à 4.4.1 (i)

$$\dim \operatorname{H}^{1}(\mathfrak{T}, K) \leq \operatorname{C·sup}\{ \prod_{a \in A} d_{a} \mid |A| = n-|i| \} .$$

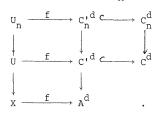
C'est l'énoncé dual de 4.5.1(ii).

$$\dim H^{1}(\widetilde{U},K) \leq C \cdot \sup \left\{ \prod_{a \in A} d_{a} ||A| = |n-|i| \right\}.$$

On a $\text{H}^*(\widetilde{U},K)=\text{H}^*(\widetilde{X},f_*K)$, et on applique 4.5.3 à f_*K , dans $^PD_C^{\geqslant O}(X,\overline{\Phi}_{_0})$ par 2.2.5.

$$\dim H^{i}(U_{n},F) \leq o(d_{n}) .$$

Le problème étant local, on peut supposer X affine. Soit



Le revêtement étale U_n/U est de degré $d_n=d_n^{\ id}$ alors que, d'après 4.5.4, on a, pour i < 0 ,

$$\dim H^{i}(U_{n},F) \leq C \cdot d_{n}^{d-|i|}$$

Remarque 4.5.6 : la démonstration montre que pour X de dimension d , on peut prendre les U_n tels que dim $\operatorname{H}^1(U_n,F) \leq \operatorname{O}(d_n^{1-|i|/d})$.

5. LA PERVERSITÉ AUTODUALE: POIDS

Dans ce paragraphe nous complétons les résultats géométriques du paragraphe 4 par des résultats plus arithmétiques. Nous ne considérons que des schémas séparés de type fini sur un corps fini, ou sur la clôture algébrique d'un corps fini, et que la perversité autoduale $\mathbf{p}_{1/2}$.

5.0. Notations. Soient p un nombre premier \neq 1, q une puissance de p, IF un corps fini à q éléments et IF une clôture algébrique de IF .

Comme dans [1] (0.7), nous noterons avec un indice o un objet sur \mathbb{F}_q (un schéma, ou un faisceau sur un schéma). La suppression de cet indice indique l'extension des scalaires de \mathbb{F}_q à \mathbb{F} .

5.1. Rappels de [1].

5.1.1. Soient X_O un schéma de type fini sur \mathbb{F}_q et F_O un $\overline{\mathbb{Q}}_{\hat{k}}$ -faisceau sur X_O . Sur \mathbb{F}_q , on dispose du morphisme de Frobenius $\operatorname{Fr}_q:X\to X$ (élévation des coordonnées à la puissance q) et d'un isomorphisme $F_q^*:\operatorname{Fr}_q^*F\to F$ (penser à F_O comme étalé sur X_O , donnant lieu à un diagramme commutatif cartésien de flèches horizontales Fr_q

 $\begin{array}{cccc}
F & \longrightarrow & F \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & \longrightarrow & X
\end{array}$

Pour chaque entier n , on pose $\operatorname{Fr}_{qn} = (\operatorname{Fr}_q)^n$ et on note $\operatorname{F}_{qn}^*: \operatorname{Fr}_{qn}^* \operatorname{F} \to \operatorname{F}$ l'isomorphisme déduit de F_q^* par itération. Si $\operatorname{X}_1/\operatorname{F}_{qn}$ est déduit de X_0 par extension des scalaires à F_{qn} , on a $\operatorname{X}_1 \otimes_{\operatorname{FF}_q n} \operatorname{F} = \operatorname{X}$, et ces morphismes sont ceux de Frobenius, rel.à $\operatorname{X}_1/\operatorname{F}_{qn}$.

Les points fixes de Fr_{q^n} sont exactement les $x\in X(F)$ définis sur IF_{q^n} . En chacun de ces points fixes, $\text{F}_{q^n}^*$ est un automorphisme de F_x

De même, pour ${\rm K}_{_{\hbox{\scriptsize O}}}$ dans ${\rm D}_{_{\hbox{\scriptsize C}}}^b({\rm X}_{_{\hbox{\scriptsize O}}},\overline{\overline{\mathbb{Q}}}_{_{\hat{\mathbb{X}}}})$, ${\rm K}$ est muni de

Proposition 5.1.2. Le foncteur $F_0 \mapsto (F,F_q^*)$ de la catégorie des faisceaux pervers sur X dans celle des faisceaux pervers sur X munis d'un isomorphisme $F_q^*F \xrightarrow{\sim} F$ est pleinement fidèle. La catégorie image essentielle est stable par extensions et par sousquotients.

Remarque . On peut montrer que pour les \mathbf{Z}_{ℓ}^- faisceaux pervers, le foncteur analogue est une équivalence de catégories. Pour les coefficients \mathbf{Q}_{ℓ} ou $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$, il n'est pas essentiellement surjectif; déjà pour \mathbf{X}_0^- = Spec($\mathbf{F}_{\mathbf{Q}}^-$) (un point), l'objet suivant n'est pas dans l'image essentielle : \mathbf{F} est \mathbf{Q}_{ℓ} ; σ : $\mathbf{Fr}_{\mathbf{Q}}^*$ $\mathbf{Q}_{\ell}^ \mathbf{Q}_{\ell}^ \mathbf{Q}_{\ell}^-$ est la multiplication par \mathbf{u} , \mathbf{u} n'étant pas une unité ℓ -adique.

<u>Preuve</u>. Soient a la projection de X_o sur $Spec(\mathbb{F}_q)$, et Γ le foncteur "sections globales" sur $Spec(\mathbb{F}_q)$. Pour K_o , L_o dans $D^b_C(X_o,\overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$, on a

(5.1.2.1)
$$\operatorname{Hom}(K_{0}, L_{0}) = \operatorname{H}^{0}\operatorname{RHom}(K_{0}, L_{0}) , \text{ et}$$

(5.1.2.2)
$$RHom(K_0,L_0) = R\Gamma.Ra_* R\underline{Hom} (K_0,L_0) .$$

Pour M dans D^b_c (Spec(F $_q)$, $\overline{\Psi}_{\hat{\ell}})$, le foncteur RF donne lieu à une suite spectrale

$$(5.1.2.3) \qquad \text{E}_2^{pq} = \text{H}^p(\text{Spec IF}_q, \text{H}^q\text{M}_o) = \text{H}^p(\text{Gal}(\text{IF}/\text{IF}_q), \text{H}^q\text{M}) \Rightarrow \text{H}^{p+q}\text{RIM}_o \ .$$

Cette suite spectrale est obtenue par passages à la limite. La cohomologie galoisienne utilisée $\mathrm{H}^p(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$,) est la cohomologie continue.

Puisque $Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)=\widetilde{\mathbf{Z}}$, engendré topologiquement par le Frobenius géométrique F (l'inverse du Frobenius arithmétique $\phi: x \mapsto x^q: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$), les groupes de cohomologie galoisienne considérés sont nuls pour $p \neq 0$,l; pour p=0, on trouve les invariants de F, pour p=1, les coinvariants, et (5.1.2.3) se ramène à des suites exactes courtes

 $(5.1.2.4) \qquad \qquad 0 \rightarrow (\mathit{H}^{n-1}\mathit{M})_{F} \rightarrow \mathit{H}^{n}\mathit{R}^{r}\mathit{M}_{o} \rightarrow (\mathit{H}^{n}\mathit{M})^{F} \rightarrow 0 \quad \cdot$

Les $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -espaces vectoriels sous-jacents aux \mathbb{H}^1 Ra* $\underline{\mathrm{RHom}}$ $(\mathrm{K}_0,\mathrm{L}_0)$ sont simplement les $\underline{\mathrm{H}^1}$ RHom $(\mathrm{K},\mathrm{L})=\mathrm{Hom}^1(\mathrm{K},\mathrm{L})$, calculés sur X . Combinant(5.1.2.1)à (5.1.2.4), on obtient des suites exactes courtes

$$(5.1.2.5) \quad \text{O} \rightarrow \left(\text{Hom}^{\text{i}-1}(\text{K,L})\right)_{\text{F}} \rightarrow \text{Hom}^{\text{i}}(\text{K}_{\text{O}},\text{L}_{\text{O}}) \rightarrow \text{Hom}^{\text{i}}(\text{K,L})^{\text{F}} \rightarrow \text{O} \ .$$

Faisons i = 0 . Si K_0 et L sont pervers, le Hom^{-1} est nul, et on obtient la pleine fidélité annoncée

$$\operatorname{Hom}(K_{\mathcal{O}}, L_{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(K, L)^{F}$$
.

Pour i=l et K_o et L_o pervers, $\mathrm{Hom}^1(\mathrm{K_O,L_o})$ (resp. $\mathrm{Hom}^1(\mathrm{K,L})$) s'identifie par 3.1.17(ii) au groupe des extensions de K_o par L_o (resp. de K par L) dans la catégorie correspondante de faisceaux pervers. On obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(K,L)_F \rightarrow \text{Ext}^1(K,L)^F \rightarrow 0$$
.

Une suite exacte courte analogue vaut pour le <code>Extl</code> dans la catégorie des faiceaux pervers <code>F</code> sur <code>X</code>, munis de $\varphi: Fr_q^*F \xrightarrow{\sim} F:$ l'oubli de φ définit <code>Extl</code>((<code>F</code>, φ),(<code>G</code>, φ)) \to <code>Extl</code>(<code>F</code>, G), et la classe de l'extension <code>E</code> est dans l'image si et seulement si elle est fixe par φ , i.e. si on peut compléter le diagramme

$$0 \longrightarrow \operatorname{Fr}_{\mathbf{q}}^{*}G \longrightarrow \operatorname{Fr}_{\mathbf{q}}^{*}E \longrightarrow \operatorname{Fr}_{\mathbf{q}}^{*}F \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \varphi \qquad \qquad \downarrow \varphi \qquad \qquad \downarrow \varphi$$

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

On devrait pouvoir comparer ces deux suites exactes. Nous nous dispenserons de cette vérification en utilisant qu'elles impliquent que $\operatorname{Ext}^1(F_0,G_0)$ et $\operatorname{Ext}^1((F,\varphi),(G,\varphi))$ ont la même dimension. La pleine fidélité assure l'injectivité de $\operatorname{Ext}^1(F_0,G_0) \to \operatorname{Ext}^1((F,\varphi),(G,\varphi))$. Cette flèche est donc bijective, et la catégorie image essentielle est donc stable par extensions. La stabilité par sous-quotient résulte du lemme suivant.

On suppose que

F (6

- (a) Pour j: $y_0 \hookrightarrow z_0$ un plongement ouvert, ces catégories sont stables par p_{j_1} , p_{j_*} (et donc $p_{j_{1*}}$) et p_{j^*} .
- (b) Pour i: $Y_0 \hookrightarrow Z_0$ un plongement fermé, i* est une équivalence de $P(Y_0)$ avec la sous-catégorie de $P(Z_0)$ formée des objets à support dans Y_0 .
- (c) Pour Y_O lisse purement de dimension d et F de la forme L[d] avec L lisse, pour tout sous-quotient lisse stable par φ L' de L, (L'[d], φ) est dans φ (Y_O).

Alors, les P(Y) sont stables par sous-quotients.

Prouvons la stabilité par sous-objets et par quotients de P(Y_O), par récurrence noethérienne sur \overline{Y}_O . Soit donc B dans P(Y_O) et A un sous-objet de B . Il faut prouver que A est dans P(Y_O) . Le quotient B/A sera dans P(Y_O) par stabilité par conoyaux.

On peut supposer que $Y_0 \neq \emptyset$. Il existe alors un ouvert $j: U_0 \hookrightarrow Y_0$ de Y_0 , non vide, lisse purement d'une dimension d, et sur lequel B et A soient de la forme $(l[d], \emptyset)$, avec l lisse. D'après (a) et (c), $p_{j_1j}A$ et $p_{j_2j}BA$ sont dans $p(Y_0)$, donc aussi $I = Im(p_{j_1j}A) \to A \hookrightarrow B$ et $J = Ker(B \to p_{j_2j}BA)$. On a $I \subset A \subset J \subset B$, et J/I est à support dans $Z_0 = Y_0 - U_0$. Le sousobjet A/I de J/I est dans $P(Y_0)$ par (b) et l'hypothèse de récurrence appliquée à Z_0 , et A est dans $P(Y_0)$ comme extension de A/I par I.

Remarque 5.1.4 . Si, pour tout sous-schéma Y de X , on se donne une sous-catégorie pleine $P(Y_0)$ de celle des faisceaux pervers sur Y , et que les conditions de 5.1.3 sont remplies par ce système de sous-catégories, les $P(Y_0)$ sont stables par sous-quotients. La même démonstration le montre. On peut aussi le déduire de 5.1.2, 5.1.3. Sous cette forme, le résultat vaut sur un corps de base quelconque (pour autant que les faisceaux pervers soient définis, cf. 2.2.12) et pour une perversité comme en 2.2.1 quelconque (pas seulement pour $P_{1/2}$).

5.1.5 . Rappelons ([1] 1.2.1, 1.2.2) qu'un \overline{q}_{ℓ} -faisceau $^{F}_{\circ}$ sur $^{X}_{\circ}$

est dit ponctuellement pur de poids w (w $\in \mathbb{Z}$) si pour tout n et tout point fixe $x \in X_O(\mathbb{F})$ de $\operatorname{Fr}_{q^n} := \operatorname{Fr}_q^n$ (i.e., tout $x \in X_O(\mathbb{F}_{q^n})$) , les valeurs propres de l'automorphisme $\operatorname{F*}_{q^n}$ de F_{x} sont des nombres algébriques dont les conjugués complexes sont tous de valeur absolue $(\operatorname{q}^n)^{w/2}$. Rappelons ([1] 1.2.2) que F_O est dit mixte s'il admet une filtration finie de quotients successifs ponctuellement purs. Les poids de ceux de ces quotients qui sont non nuls sont les poids ponctuels de F .

On définit la catégorie $D^b_m(X_{_{\! O}},\overline{\mathbb{Q}}_{\!\! \ell})$ des <u>complexes mixtes</u> comme la sous-catégorie de $D^b_c(X_{_{\! O}},\overline{\mathbb{Q}}_{\!\! \ell})$ formée des K tels que les faisceaux de cohomologie \mathcal{H}^iK soient mixtes.

5.1.6. D'après [1] 6.1, les sous-catégories triangulées $D_m^b(X_o,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ des $D_c^b(X_o,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ sont stables par toutes les opérations usuelles $(Rf_*,\ Rf_!,f^*,Rf^!,\ \emptyset$, $R\underline{\operatorname{Hom}}$, dualité de Verdier et, en un sens convenable, cycles évanescents). On a aussi stabilité par $\tau_{<\mathbf{i}}$ et $\tau_{\ge\mathbf{i}}$, puisque "mixte" se teste sur les faisceaux de cohomologie. Ces opérations sont les seules utilisées pour construire les $p_{\tau_{>\mathbf{i}}}$ et les $p_{\tau_{>\mathbf{i}}}$, pour $p_{\tau_{>\mathbf{i}}}$ une perversité.

 $\frac{\text{Stabilit\'es}}{\text{D}_{\text{C}}^{\text{b}}(\text{X}_{\text{o}}, \overline{\mathbb{Q}}_{\hat{\ell}})} \quad \underbrace{\text{induit une}}_{\text{t-structure}} \quad \underbrace{\text{t-structure}}_{\text{bull}} \quad \underbrace{\text{de perversit\'e}}_{\text{m}} \quad \underbrace{\text{p}_{1/2}}_{\text{m}} \quad \underbrace{\text{de perversit\'e}}_{\text{m}} \quad \underbrace{\text{de perversit\'e}}_{\text{$

(ii) Tout sous-quotient d'un faisceau pervers mixte est mixte.

L'assertion (i) résulte de ce que, d'après 5.1.6, D_{m}^{b} est stable par les $P_{\tau_{\leq i}}$ et $P_{\tau_{\leq i}}$. Elle implique que les faisceaux pervers mixtes forment une sous-catégorie abélienne pleine stable par noyaux, conoyaux et extensions de celle de tous les faisceaux pervers. L'assertion (ii) résulte de 5.1.4, les hypothèses de 5.1.3 étant vérifiées par 5.1.6.

Dans la suite, nous ne considérerons plus que des complexes mixtes. On n'est pas exposé à en rencontrer d'autres, sauf à le faire exprès.

5.1.8. On dit que K dans $D_m^b(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$ est <u>de poids</u> $\leq w$ si pour chaque i , les poids ponctuels de $\mathcal{H}^{\dot{1}}K$ sont $\leq w+i$. On note $D_{\leq W}^b(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$ la sous-catégorie correspondante de $D_m^b(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$. Noter le décalage en i dans la définition. Sa justification est [1] 6.2.3,

cité plus bas. Il donne :

7. 溴

$$(D_{\leq w}^b)[1] = D_{\leq w+1}^b$$

(et en particulier $D^b_{\leq W}[1] \supset D^b_{\leq W}$, l'inclusion inverse de celle qui apparaît dans l'axiome 1.3.1 ($\overline{i}i$) des t-structures).

On dit que K est <u>de poids</u> \succeq w si son dual de Verdier DK est de poids \le -w , et on note $D_{\ge W}^{\hat{D}}$ $(X_{O},\overline{\mathbb{Q}_{\hat{L}}})$ la sous-catégorie correspondante de $D_{m}^{\hat{D}}(X_{O},\overline{\mathbb{Q}_{\hat{L}}})$. On dit que K est pur de poids w s'il est de poids \le w et \ge w . Si X_{O} est lisse purement de dimension det que les $\overline{\mathbb{Q}}_{\hat{L}}$ -faisceaux $H^{\hat{L}}K$ sont lisses, on a $H^{\hat{L}}DK = (H^{-2d-\hat{L}}K)^{\hat{L}}$ (d), et K est pur de poids w si et seulement si chaque $H^{\hat{L}}K$ est ponctuellement pur de poids w+i .

La première assertion est triviale; la seconde en est duale.

Remarque 5.1.10. Si X_1 se déduit de X_0 par extension des scalaires de \mathbb{F}_q à \mathbb{F}_{q^n} , et que K_1 est l'image inverse de K_0 sur K_1 , K_1 est mixte (resp. et de poids $\leq w$, $\geq w$) si et seulement si K_0 l'est. Pour parler de poids, il suffit donc de disposer de (X,K), et d'une façon d'abaisser le corps de définition à \mathbb{F}_{q^n} , pour n assez divisible.

Remarque 5.1.11. La fibre en IF d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau constructible sur Spec(\mathbb{F}_q) est munie d'une action par transport de structures de Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q). Cette construction fournit une équivalence de catégories : $(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -faisceaux constructibles sur Spec(\mathbb{F}_q)) \to ($\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)). Le Frobenius \mathbb{F}_q^* est l'action de l'élément de Frobenius

géométrique $F = \phi^{-1}$, où ϕ est le Frobenius arithmétique $\omega:\mathbb{F}\to\mathbb{F}:x\longmapsto x^q$. Nous utiliserons ce dictionnaire pour étendre la terminologie des poids aux vectoriels munis d'une action de $Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{G})$.

5.1.12. On peut cumuler 5.1.10 et 5.1.11. Par exemple, pour (X_{σ}, K_{σ}) sur \mathbb{F}_{σ} et $u: Y \to X$ de type fini, il a un sens de parler des poids de H1 (Y,K) (notation 4.0.3) : u et Y sont définis sur $\mathbf{IF}_{\mathbf{c},\mathbf{n}}$, pour \mathbf{n} assez divisible, d'où une action de $\operatorname{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_n)^{q^{-1}}$ sur $\operatorname{H}^1(Y,u^*K)$. Deux façons de définir u et Y sur $\mathbf{F}_{q^n} \quad \text{coıncident sur} \quad \mathbf{F}_{q^m}, \quad \mathbf{m} \quad \text{multiple assez divisible de} \quad \mathbf{n} \ , \ \text{et}$ les deux actions de Galois obtenues coincident donc sur le sous-groupe d'indice fini $\, \, {\rm Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{_{\mathbb{Q}^m}}) \,$ de $\, \, {\rm Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{_{\mathbb{Q}^n}})$. Les poids ne dépendent que de cette restriction

5.1.13. Le théorème principal de [1] ([1] 3.3.1, 6.2.3) est que, si f: $X_o \to Y_o$ est un morphisme séparé de schémas de type fini sur \mathbb{F}_q , le foncteur $\text{Rf}_!$ envoie $D^b_{<_W}(X_o,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ dans $D^b_{<_W}(Y_o,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$. Il est clair que f* respecte $D_{\leq w}^{b}$, et que \otimes envoie $D_{\leq w}^{b}$, $D_{\leq w}^{b}$, dans p_{w+w}^b . Invoquant la dual \overline{i} té, on obtient la table \overline{d} e sta \overline{b} ilités suivante (on écrit f_1 , $f^!$ pour Rf_1 , $Rf^!$).

Stabilités 5.1.14.

- (i) f_1 , f^* respectent $D_{\leq w}^b$;
- (i*) f!, f, respectent Db, ;
- (ii) \otimes envoie $D_{\leq W}^b \times D_{\leq W}^b$, $\frac{dans}{dans} D_{\leq W+W}^b$,; (ii*) $R\underline{Hom}$ envoie $D_{\leq W}^b \times D_{\geq W}^b$, \underline{dans} $D_{\geq -W+W}^b$;
- (iii) D <u>échange</u> $D_{\leq W}^{b}$ et $D_{>-W}^{w}$.

Le produit tensoriel externe $\square := \operatorname{pr}_1^* \otimes \operatorname{pr}_2^* : D^b_m(X_{\mathcal{O}}, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}}) \times D^b_m(Y_{\mathcal{O}}, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}}) \longrightarrow D^b_m(X_{\mathcal{O}} \times Y_{\mathcal{O}}, \overline{\mathbb{Q}}_{\underline{\ell}})$ envoie, d'après (i*) et (ii) , $D^b_{\leq W} \times D^b_{\leq W'}$ dans $D^b_{\leq W+W'}$. A l'aide de 5.1.9, on vérifie facilement la réciproque

 $(5.1.14.1) \quad \inf\{w \mid K_{O} \boxtimes L_{O} \in D_{\leq W}^{b}\} = \inf\{w' \mid K_{O} \in D_{\leq W}^{b}\} + \inf\{w'' \mid L_{O} \in D_{\leq W''}^{b}\}.$

On sait que s commute à la dualité (SGA 5 III 1.1.7 implique que

le complexe dualisant de $X_0 \times Y_0$ est le \square de ceux de X_0 et Y_0 , et SGA 5 III 2.2.4 (commutation de RHom et) permet d'en conclure la commutation à la dualité). Dualisant (5.1.14.1), on trouve

 $(5.1.14.1*) \quad \sup\{\mathbf{w} \mid \mathbf{K}_{\mathbf{O}} \boxtimes \mathbf{L}_{\mathbf{O}} \in \mathbf{D}^{b}_{>\mathbf{W}}\} = \sup\{\mathbf{w}^{*} \mid \mathbf{K}_{\mathbf{O}} \in \mathbf{D}^{b}_{>\mathbf{W}^{*}}\} + \sup\{\mathbf{w}^{*} \mid \mathbf{L}_{\mathbf{O}} \in \mathbf{D}^{b}_{>\mathbf{W}^{*}}\} \ .$

- (i) $Ra_*R\underline{Hom}$ (K_O,L_O) est dans $D^b_{>0}$ (Spec(\mathbb{F}_a)).
- (ii) $\operatorname{Hom}^{i}(K_{0}, L_{0}) = 0$ pour i > 0

(iii) $\operatorname{Hom}^{i}(K,L)^{F} = 0$ $\operatorname{\underline{pour}}$ i > 0. $\operatorname{\underline{En \ particulier}}$, $\operatorname{\underline{pour}}$ i > 0, $\operatorname{\underline{le \ morphisme}}$ $\operatorname{Hom}^{i}(K_{O},L_{O}) \xrightarrow{} \operatorname{Hom}^{i}(K,L)$ $\operatorname{\underline{est \ nul}}$.

L'assertion (i) résulte de 5.1.14. Elle implique que Hom1 (K,L) est de poids > i , donc de poids > 0 pour i \geq 0 . On a donc $\operatorname{Hom}^{i}(K,L)_{F} = \operatorname{Hom}^{i}(K,L)^{F} = 0$ pour $i \geq 0$, et on applique (5.1.2.5). De même pour (iii).

5.2. Une réciproque.

12

Théorème 5.2.1. Pour que le faisceau pervers mixte F sur X

Que la condition soit nécessaire résulte de (5.1.14.1*) : pour $u: U \to X$ étale et a la projection sur $Spec(\mathbb{F}_q)$, u! = u* et a_* préservent Db. Prouvons qu'elle est suffisante. Elle implique que pour $u:U\xrightarrow{\underline{c}}X$ affine étale, $H^{O}(U,F)$ est de poids $\underline{>}W$ (au sens 5.1.12).En effet, U et u sont définis sur \mathbf{F}_{gn} convenable : $U = U_1 \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{F}$. Soit V_0 le schéma sur \mathbf{F}_q déduit de U_1 par restriction des scalaires à la Grothendieck, de \mathbb{F}_q^n à \mathbb{F}_q : c'est $\mathbb{U}_1 \to \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q^n) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q)$. On dispose de $\mathbb{V}_0: \mathbb{V}_0 \to \mathbb{X}_0$, et \mathbb{V}_1 , déduit de \mathbb{V}_0 par extension des scalaires à \mathbb{F}_q^n , est la somme des conjugués par $\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)\operatorname{deU}_1$. En particulier, $\operatorname{H}^0(\mathbb{U},\mathbb{U}^*\mathbb{F})$, muni de son action de $\mbox{ Gal}(\mbox{ }\mbox{ }\m$

5.2.2. Preuve pour X lisse connexe de dimension 1.

Ecrivons $F_{_{\scriptsize{O}}}$ comme extension successive de faisceaux pervers simples : $F_{_{\scriptsize{O}}}$ admet une filtration finie décroissante F pour laquelle chaque $\operatorname{Gr}_{F}^{i}$ est de l'un des deux types suivants :

- (a) de la forme $({}^{\circ}j_{*}L_{_{0}})[1]$, pour $L_{_{0}}$ un faisceau lisse irréductible sur un ouvert dense $j:Y_{_{0}}\hookrightarrow X_{_{0}}$; on a $({}^{\circ}j_{*}L_{_{0}})[1]=j_{_{1}}(L_{_{0}}[1])$;
 - (b) à support ponctuel, et irréductible.

Les faisceaux (a) et (b) sont mixtes; les faisceaux $L_{_{\rm O}}$ de (a), étant irréductibles, sont même purs (du moins quitte à rétrécir l'ouvert - cf. 5.1.8). D'après [1] ex. 6.2.5(c), les $^{\rm O}$ j $_*L_{_{\rm O}}$ [1]= j $_{!}$ ($L_{_{\rm O}}$ [1]) sont purs du même poids. De même, les faisceaux ponctuels (b), étant irréductibles, sont purs.

La filtration F fournit une suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(U, Gr_F^p F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F)$$
.

Les H^{i} considérés sont nuls pour i \neq -1,0 et, si r est le rang de $\mathrm{H}^{\mathrm{-1}}\mathrm{F}$ au point générique (la somme des rangs des faisceaux lisses L_{O} en (a) ci-dessus), on a pour U connexe

$$\sum_{p} \dim H^{-1}(U, Gr_F^{p}F) \leq r.$$

On en déduit que, quel que soit U affine connexe, étale sur X_{O} , chaque $\text{H}^{\text{O}}(\text{U},\text{Gr}_{\text{F}}^{\text{p}}\text{F})$ admet un quotient naturel, par un sous-espace de dimension $\leq r$, qui soit un sous-quotient de $\text{H}^{\text{O}}(\text{U},\text{F})$ et soit donc de poids > w .

Si $\operatorname{Gr}_F^p F_o$ est à support ponctuel, de support un point fermé x_o , prenons U tel que $|u^{-1}(x)| > r$, pour $x \in X$ au-dessus de x_o . Le $\operatorname{H}^o(U,\operatorname{Gr}_F^p F)$ contient alors la somme de $|u^{-1}(x)|$ copies de $(\operatorname{Gr}_F^p F)_x$. Puisque $|u^{-1}(x)| > r$, une de ces copies s'injecte dans le quotient de $\operatorname{H}^o(U,\operatorname{Gr}_F^p F)$ de poids $\geq w$, et $\operatorname{Gr}_F^p F$ lui-même est donc

de poids \geq w .

Soit \overline{X}_O la courbe projective lisse connexe dont X_O est un ouvert dense, et soit de même \overline{U} la complétion projective de $u:U\to X$ affine étale connexe sur X. Pour étudier les $Gr_F^D f_O$ du type (a), nous prendrons U sur $Y\subset X$. Soit k l'inclusion de U dans \overline{U} . On a

$$H^{1}(\overline{U}, {}^{\circ}k_{*}u^{*}L) \hookrightarrow H^{1}(U, u^{*}L)$$

et $\operatorname{H}^1(\overline{\operatorname{U}}, {}^{\mathsf{O}} k_* u^* l) = \operatorname{H}^{\mathsf{O}}(\overline{\operatorname{U}}, k_! u^* l [1])$ admet donc un quotient, par un sous-espace de dimension $\leq r$, qui soit de poids $\geq w$. Par ailleurs, ce $\operatorname{H}^{\mathsf{O}}$ est purement du poids de $l_{\mathsf{O}}[1]$ ([1] 3.2.3). Pour U convenable (par exemple avec $\overline{\operatorname{U}}$ de genre g tel que 2g-2 > r), il est de dimension > r (appliquer la formule d'Euler-Poincaré citée en 4.5.1), d'où on conclut que $l_{\mathsf{O}}[1]$ est de poids $\geq w$. Ceci termine la démonstration du théorème pour $l_{\mathsf{O}}[1]$ lisse connexe de dimension $l_{\mathsf{O}}[1]$.

Remarque 5.2.3. L'argument qui nous a permis de passer de F aux $\mathrm{Gr}_F^{\mathrm{P}} F$ peut se formaliser comme suit. Soit S la catégorie des u : U \to X , avec U affine connexe et u étale. Pour chaque F pervers sur X , soit $\int F$ le préfaisceau U \mapsto H $^{\mathrm{O}}(\mathrm{U},F)$ sur S . Soit par ailleurs N la catégorie des préfaisceaux de $\overline{\psi}_{\chi}$ -espaces vectoriels h sur S tels que dim h(U) soit borné. C'est une sous-catégorie épaisse de la catégorie pf(S) des préfaisceaux de $\overline{\psi}_{\chi}$ -espaces vectoriels sur S . Avec ces notations, pour X lisse de dimension \leq 1, le foncteur F \mapsto $\int F$ (mod N) est un foncteur exact

(faisceaux pervers sur X) \longrightarrow pf(S)/N.

Remarque 5.2.4. La méthode de démonstration utilisée dans 5.2.2 permet de prouver le résultat suivant. Soit F_{O} un faisceau pervers mixte sur X_{O} , et supposons X lisse connexe de dimension 1. Supposons que pour $u:U\to X$ étale, avec U affine connexe, la dimension du sous-espace $W^{\text{W-1}}H^{\text{O}}(U,F)$ de poids < w de $H^{\text{O}}(U,F)$ soit o(degré de U(X)). Alors, F_{O} est de poids \geq w. Pour le voir, on prend le U à la fin de la preuve de 5.2.2 de la forme suivante : prendre d'abord U_{1} tel que \overline{U}_{1} soit de genre > 1 , puis pour U un revêtement de U_{1} qui se prolonge en un revêtement étale de \overline{U}_{1} .

5.2.5. L'hypothèse "H°(U,F) de poids \geq w pour tout U affine étale sur X " s'hérite de X à V étale sur X . Pour F' un quotient de F , elle s'hérite de F à F': les foncteurs H°(U,) sont en effet exacts à droite (4.1.1). Si $\varphi: X \to Y_0$ est un morphisme affine, elle s'hérite de (X_0,F_0) à $(Y_0,P_{\varphi_{\#}}F_0)$ (où $P_{\varphi_{\#}}F_0 = P_H^0\varphi_{\#}F_0$). Pour tout V_0 affine, étale sur Y_0 , posant $U_0 = X_0 \times_{Y_0} V_0$, on a en effet (cf. la remarque sous 4.1.2 pour $U_0 \to V_0 \to P_0$)

$$H^{O}(V, p_{\phi_{*}}F_{O}) = H^{O}(U, F_{O})$$
.

Quant à la conclusion " F_o de poids \geq w", il suffit de la vérifier localement (pour la topologie étale - Zariski nous suffit) et si $\phi: X_o \longrightarrow Y_o$ est un morphisme fini (un plongement fermé nous suffit), elle est vraie pour (X_o, F_o) si et seulement si elle est vraie pour (Y_o, ϕ_*F_o) .

On laisse au lecteur le soin de déduire de ceci qu'il suffit de prouver 5.2.1 pour X_{0} l'espace affine A_{0}^{n} . Nous procéderons par récurrence sur n. Le cas n=0 est trivial, et le cas n=1 a déjà été traité (5.2.2).

5.2.6. Prouvons que si $G_{\mathbb{O}}$ est un sous-faisceau à support ponctuel de $F_{\mathbb{O}}$, il est de poids $\geq w$. Quitte à étendre le corps des scalaires, on se ramène à supposer que le support de $G_{\mathbb{O}}$ est réduit à $\{0\}$. Soit $u:U\to A^{\mathbb{I}}$ un morphisme étale, couvrant 0, avec U lisse connexe de complétion projective et lisse \overline{U} de genre >1. Soit \overline{U}_{α} une famille de revêtements étales connexes de \overline{U} , de degré $\frac{d}{d}$ tendant vers l'infini, et soit U_{α} l'image inverse de U dans \overline{U}_{α} . On dispose de $U_{\alpha}^{\mathbb{N}}\to A^{\mathbb{N}}$, et on a vu (4.5.4) que

$$\dim \operatorname{H}^{-1}(\operatorname{U}_{\alpha}^{n}, \operatorname{F/G}) \leq \operatorname{O}(\operatorname{d}_{\alpha}^{n-1}) .$$

Puisque $H^{O}(U_{\alpha}^{n},G)$ est somme de $(|u^{-1}(0)|\cdot d_{\alpha})^{n}$ copies de la fibre de G en O, la suite exacte

$$H^{-1}(U_{\alpha}^{n}, F/G) \rightarrow H^{O}(U_{\alpha}^{n}, G) \rightarrow H^{O}(U_{\alpha}^{n}, F)$$

montre que pour $\ d_{_{\Omega}}$ assez grand, une au moins de ces copies s'injecte

dans $\operatorname{H}^{\operatorname{O}}(\operatorname{U}^{\operatorname{n}}_{\alpha}, \operatorname{\mathbf{F}})$. L'assertion en résulte.

5.2.7. Prouvons que, si F n'a pas de sous-faisceau pervers à support ponctuel non trivial, F_o est de poids $\geq w$. Soit x dans A^n (un point fermé) et i_x l'inclusion de x dans A^n . D'après 5.1.9, il faut montrer que $i_x^{\dagger F}$ est de poids $\geq w$. Soit H un hyperplan passant par x. Pour H assez général, H ne contient le support d'aucun sous-faisceau pervers simple de F (il n'y en a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie) et, si u est l'inclusion de H dans A^n , $P_u^{\dagger F}$ est donc nul. Puisque H est un diviseur, $P_H^{\dagger U}^{\dagger F} = 0$ pour $i \neq 0,1$ (4.1.11 (ii)). Ici, on trouve que $P_H^{\dagger U}^{\dagger F} = 0$ pour $i \neq 1$, i.e. que $u^{\dagger F}[1]$ est pervers.

Changeant de variables (au prix de remplacer IF $_q$ par une extension finie), on peut supposer H est $\mathtt{A}^{n-1}\times\{\mathtt{O}\}\subset\mathtt{A}^n$. Soit pr la projection sur le dernier facteur :

$$\begin{array}{cccc} x & \rightarrow & H_0 & \longleftarrow & A_0^n \\ & & \downarrow & & \downarrow p_r \\ & & & \downarrow 0 & \longleftarrow & A_0^1 \end{array}$$

et $i_{x,H}$ l'inclusion de x dans H . On a $i_{x,H}^! = i_{x,H}^!$ $u^!$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que $u^!F_0$ est de poids > w Appliquons l'hypothèse de récurrence à $u^!F_0[1]$ et à $H_0 \sim R_0^{n-1}$. Il s'agit de vérifier que tout V_0 affine, étale sur M_0^{n-1} , $H^1(V,u^!F)$ est de poids $\geq w+1$.

Posons $U_0 = V_0 \times A_0^1$. Soit le carré cartésien

$$\begin{array}{cccc} v_{o} & & & & v_{o} \\ & \downarrow p & & & \downarrow pr \\ \{o\} & & & & A_{o}^{1} & . \end{array}$$

Si on note encore f l'image inverse de f sur U, $v^!f$ est l'image inverse de $u^!f$ sur V : $v^!f$ est pervers, et il faut montrer que $H^1(V,v^!f)$ est de poids $\geq w+1$.

On a $i^!pr_* = p_*v^!$. Récrivons-le $i^![1] \circ pr_* = p_* \circ v^![1]$. Les foncteurs considérés sont alors tous t-exacts à droite (4.1.11(ii) et 4.1.1), et passant au H^O (1.3.17 (iii) on obtient

(5.2.7.1)
$$H^{O}(V, v^{!}F[1]) = H^{O}(i^{!}(p_{pr_{*}}F)[1])$$
.

Puisque $p_{\text{pr}_*}F_{\text{O}}$ sur A_{O}^1 vérifie encore l'hypothèse du théorème (5.2.5), on sait par 5.2.2 que $p_{\text{pr}_*}F$ est de poids $\geq w$. Le membre de droite de (5.2.7.1) est donc de poids $\geq w+1$, et $H^1(V, v^!F)$ aussi.

5.2.8. Fin de la preuve de 5.2.1. Soit G le plus grand sous-faisceau pervers de F dont le support est de dimension O. Il est stable par $F_{\mathbf{q}}^*$, donc provient d'un sous-faisceau pervers $G_{\mathbf{q}}^{O}$ de $F_{\mathbf{q}}^{O}$. D'après 5.2.7 et 5.2.5, $F_{\mathbf{q}}/G_{\mathbf{q}}^{O}$ est de poids \geq w . Le faisceau pervers $F_{\mathbf{q}}^{O}$ est donc de poids \geq w , comme extension de $F_{\mathbf{q}}/G_{\mathbf{q}}^{O}$ par $G_{\mathbf{q}}^{O}$.

5.3. La filtration par le poids.

On se ramène par torsion au cas où w=0. Soit F_0 de poids ≥ 0 . Si G_0 est un quotient de F_0 , pour tout U_0 affine, étale sur X_0 , $H^0(U,G)$ est un quotient de $H^0(U,F)$, donc est de poids ≥ 0 , et on applique 5.2.1. Si G_0 est un sous-faisceau pervers de F_0 , la suite exacte

$$H^{-1}(U,F/G) \rightarrow H^{\circ}(U,G) \rightarrow H^{\circ}(U,F)$$

montre de même que G_{\odot} est de poids \geq -1 . On améliore cette estimation du poids en passant à $X_{\odot} \times X_{\odot} : G_{\odot} \times G_{\odot}$ est un sous-faisceau de $F_{\odot} \times F_{\odot}$. Il est donc de poids \geq -1 , et par (5.1.14.1*) G_{\odot} est de poids \geq -1/2 . Les poids étant entiers, il est même de poids \geq 0 .

Les assertions respées s'obtiennent par dualité.

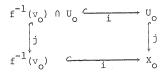
<u>Deuxième preuve</u>. Voici une autre preuve de 5.3.2, généralisé au cas d'un plongement non nécessairement affine. Il suffit de montrer que si $^F_{\ o}$ est de poids \geq w , $\text{j}_{1 \ *}^{\ F}_{\ o}$ l'est aussi. Il suffit par ailleurs de traiter le cas d'un plongement ouvert.

(a) Preuve pour $X_0^-U_0$ fini. Soit $v:V_0 \to X_0$ étale :

On a
$$v*j_{!*}^{F} = j_{!*}^{V*F} = {}^{\circ}_{!*}^{V*F} = {}^{\circ}_{-1}^{-1} j_{*}^{V*F} = H^{\circ}(V^{-1}(U), V^{*F})$$
.

Ce dernier groupe étant de poids \geq w (5.1.14 (i*)), la réciproque 5.2.1 montre que j $_{!*}^{F}$ est de poids \geq w .

(b) Réduction au cas (a) (esquisse). Le problème étant local, on se ramène à supposer $X_{\stackrel{}{O}}$ affine. Procédons par récurrence sur sa dimension. Pour toute projection $f:X_{\stackrel{}{O}}\to A_{\stackrel{}{O}}^1$, il existe un ouvert non vide $V_{\stackrel{}{O}}\subset A_{\stackrel{}{O}}^1$ tel que pour tout point fermé $v_{\stackrel{}{O}}\in V_{\stackrel{}{O}}$, donnant lieu à



Remarque 5.3.3. Pour tout morphisme quasi-fini f , f_{1*} transforme faisceaux pervers de poids \geq w (resp. \leq w) en faisceaux pervers de poids \geq w (resp. \leq w), et donc faisceaux purs en faisceaux purs du même poids. On peut le déduire de 5.3.2 (2è preuve) en factorisant f en (morphisme fini) (plongement ouvert). Une autre preuve, parallèle à la première preuve de 5.3.2, est donnée en 5.4.3.

Corollaire 5.3.4. Tout faisceau pervers mixte simple F est pur

Il existe j: $U_o \hookrightarrow X_o$ lisse connexe de dimension d et un faisceau lisse L_o sur U_o tels que $F_o = j_{!*}(L_o[d])$ (4.3.1). On peut rétrécir U_o (4.3.2). Le faisceau lisse L_o étant irréductible, il résulte des définitions qu'on peut le prendre pur (équivalent ici à ponctuellement pur (5.1.8). On peut prendre U_o affine, et il ne reste alors qu'à appliquer 5.3.2.

Théorème 5.3.5. Un faisceau pervers mixte admet une unique filtration finie croissante W, la filtration par le poids, telle que $\operatorname{Gr}_i^{\mathsf{W}}\mathsf{F}_0$ soit pur de poids i . Tout morphisme f : $\mathsf{F}_0 \longrightarrow \mathsf{G}_0$ est strictement compatible aux filtrations par le poids de F_0 et G_0 .

Si les faisceaux pervers simples mixtes (et donc purs) U_0 et V_0 sont de poids u et v, avec u > v, $\operatorname{Ext}^1(V_0,U_0) = 0$ (5.1.15(ii) pour i=1; rappelons que $\operatorname{Ext}^1 = \operatorname{Hom}_D^1$). Soit S^+ (resp. S^-) l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux pervers mixtes simples

de poids > i (resp. \leq i) . Le sous-faisceau $\text{W}_{\text{i}}^{\text{F}}_{\text{O}}$ de F_{O} est fourni par le lemme suivant, appliqué à $\text{S}^{\text{+}}$ et $\text{S}^{\text{-}}$. Combiné à 5.3.1, il fournit aussi l'unicité, et la stricte fonctorialité.

Lemme 5.3.6. Soit A une catégorie abélienne dont tout objet est de longueur finie. Soient (S^+,S^-) une partition en deux classes de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de A, et A^+ (resp. A^-) la sous-catégorie pleine de A formée des X dont les sous-quotients simples sont dans S^+ (resp. S^-). Supposons que pour U dans S^+ et V dans S^- , on ait Ext^1 (V,U) = O. Alors, tout objet F de A admet un unique sous-objet WF dans A^- , tel que F/WF soit dans A^+ . Pour tout morphisme $f: F \to G$, on a f(WF) = f(F) \cap WG.

Pour X dans A^+ et Y dans A^- , la suite exacte des Ext montre que $\operatorname{Ext}^1(Y,X) = 0$. Les classes S^+ et S^- étant disjointes, on a aussi $\operatorname{Hom}(X,Y) = \operatorname{Hom}(Y,X) = 0$.

Prouvons l'existence de WF par récurrence sur la longueur ℓ de F . Pour ℓ = 0 , F = 0 et l'assertion est claire. Si ℓ > 0 , soit S un sous-objet simple de F . L'hypothèse de récurrence s'applique à F/S , d'où l'existence d'un W(F/S) . Soit E son image inverse dans F . C'est une extension de W(F/S) par S . Si S est dans S , on prend WF = E . Si S est dans S , la nullité de Ext (W(F/S),S) montre que l'extension E est triviale, et on prend pour WF un relèvement de W(F/S) dans E .

Prouvons l'unicité. Si les sous-objets W' et W" de F sont dans A^- , et que F/W' et F/W'' sont dans A^+ , les nullités de Hom(W',F/W'') et Hom(W',F/W'') montrent que les morphismes $W' \to F \to F/W''$ et $W'' \to F \to F/W''$ sont nuls, i.e. que W' = W''.

Enfin, pour tout morphisme f : F \to G , tant f (WF) que f(F) n WG vérifient la propriété caractéristique de WfF : on a WfF = fWF = fF n WG .

tel que $H^{-d}(F_0)|U_0$ soit de poids ponctuels $\leq w-d$.

Preuve. La condition est nécessaire. Prouvons qu'elle est suffisante. Si F_{o} n'était pas de poids \leq w , d'après 5.3.5, il admettrait un quotient simple G_{o} de poids $w_{1} > w$. Soient $j: Y_{o} \hookrightarrow X_{o}$ lisse connexe, de dimension d , et L_{o} un faisceau lisse sur Y_{o} , tels que $G_{o} \simeq j_{!*}(L_{o}[d])$. On peut prendre Y_{o} affine, et L_{o} ponctuellement pur de poids w_{1} -d . La suite exacte longue de cohomologie attachée à

$$0 \to \operatorname{Ker}(F_0 \to G_0) \to F_0 \to G_0 \to 0$$

fournit, sur un ouvert dense V_0 de Y_0 , un épimorphisme

$$H^{-d}(F_{o}) \mid V_{o} \longrightarrow H^{-d}(G_{o}) \mid V_{o} = L_{o} \mid V_{o}.$$

L'hypothèse assure que pour V_{o} assez petit, les poids ponctuels de $H^{-d}(F_{o}) \mid V_{o}$ sont \leq w-d . Ceux de L_{o} le sont donc aussi, d'où $w_{1} \leq w$: contradiction.

La preuve s'obtient en recopiant [1](3.4.1 (iii)). Soit F' la somme dans F des sous-faisceaux pervers simples de F. C'est le plus grand sous-objet semi-simple de F, et il suffit de vérifier que F' = F. Le sous-faisceau F' de F est stable par Frobenius. Il provient donc de $F'_0 \subset F_0$ (5.1.2). Soit $F''_0 = F_0/F'_0$. La classe de l'extension $0 \to F'_0 \to F^*_0 \to 0$ a une image nulle dans $\operatorname{Ext}^1(F'',F')$ (5.1.15 (iii)), puisque F'_0 et F''_0 sont purs du même poids (5.3.1). On a donc $F \simeq F' \oplus F''$. Si F'' était non nul, il admettrait un sous-objet simple; ce dernier se relèverait dans F, contredisant la maximalité de F'. On a donc F'' = 0, et F' = F.

Soit \mathbf{E}_n le $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{A}}$ -faisceau sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{IF}_q)$, de fibre $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{A}}^n$ (base $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n})$, sur laquelle le Frobenius \mathbf{F} agit de façon unipotente

avec un seul bloc de Jordan : Fe $_n$ = e_n , et , pour i < n , Fe $_i$ = $e_i^+e_{i+1}^-$. C'est un faisceau pur indécomposable de poids O , non semi-simple si n > 1 . Notons encore E $_n$ son image inverse sur X $_0$.

 $\frac{\text{Proposition 5.3.9.}}{\text{sont ceux de la forme}} \text{ S}_{0} \overset{\text{M}}{\otimes} \text{ E}_{n} \text{ , avec } \text{S}_{0} \overset{\text{simple.}}{\otimes}$

(ii) Si So est simple, il existe d et S₁ sur $X_1:=X_0\otimes \mathbb{F}_q^d$, dont So soit l'image directe par $\pi:X_1\to X_0$, restant simple sur X, et non isomorphe à ses conjugués sous
Aut($\mathbb{F}_{qd}/\mathbb{F}_q$).

Soit F_0 un faisceau pervers tel que F soit semi-simple. C'est le cas pour F_0 pur (5.3.8), et pour F_0 simple. Soit A l'ensemble des classes d'isomorphie de constituants simples de F, et écrivons F comme somme de ses constituants isotypiques : $F = \# \ F_a$ (a \in A). La décomposition de A en orbites fournit une décomposition stable par F_q^* de F - donc une décomposition de F_0 (5.1.2) : $F_0 = \# \ F_0$ (C orbite de Fr_q^* dans A). Pour C une orbite à d'éléments et a \in C, $F_a \subset F_C \subset F$ est stable par F_q^* = $(F_q^*)^d$, donc définit un sous-faisceau pervers F_{1a} du faisceau pervers F_{1C} déduit de F_0 par image inverse sur F_1 soit F_1 en Pour F_1 la projection de F_1 sur F_1 on a F_1 soit F_2 simple de classe a, et choisissons un isomorphisme F_1 soit F_1 en F_1 de Frobenius sur F_1 sur F_1 en F_2 en F_1 en F_2 en F_3 en F_4 en F_3 en F_4 en F_3 en F_4 en F_4

Si F_o est indécomposable, il n'y a qu'une orbite et (V_a,F_q^*d) est indécomposable : F_q^*d agissant sur V_a n'a qu'un seul bloc de Jordan. Changeant l'isomorphisme ϕ : $Fr_{qd}^*G_a \simeq G_a$, on peut supposer F_{qd}^* sur V_a unipotent; dans ce cas, (G_a,ϕ) est isomorphe à un sous-objet de (F_a,F_{qd}^*) , donc correspond à un faisceau pervers G_1 sur X_1 , et $F_{1a} \simeq G_1 \otimes E_{\dim(V_a)}$. On utilise ici que l'image inverse sur $\operatorname{Spec}(F_{qd})$ de F_a est isomorphe au faisceau analogue sur $\operatorname{Spec}(F_{qd})$. On obtient

$$F_o \simeq \pi_*(G_1 \otimes E_n) \simeq \pi_*(G_1) \otimes E_n$$

et $\pi_*(G_1)$ est simple. Ceci prouve (i).

Pour F_{o} simple, il n'y a qu'une orbite, et l'action de F_{c}^{*} sur V_{a} est irréductible : V_{a} est de dimension 1, et on obtient (ii).

Remarque 5.3.10. Jusqu'à 5.3.8 inclus, les résultats obtenus, et leur démonstration, valent aussi bien en Φ_{ℓ} - (ou E_{λ} -) cohomologie. L'assertion 5.3.9 (i) reste vraie en Φ_{ℓ} - (ou E_{λ} -) cohomologie, mais l'algèbre linéaire requise pour le déduire de 5.3.8 et 5.1.2 est plus compliquée. L'assertion 5.3.9 (ii) n'est plus vraie telle quelle.

$$F_{\circ} = j_{!*}F'_{\circ} \oplus i_{*}F''_{\circ}$$
:

- (i) Le morphisme d'adjonction $p_{j_1} j * F_0 \rightarrow F_0$ se factorise par le quotient $j_1 * j * F_0$ de $p_{j_1} j * F_0$, et $p_{j_2} j * F_0 \rightarrow p_{j_2} j * F_0$ par le sousciplet $j_1 * j * F_0$ de $p_{j_2} j * F_0$.
- (ii) Le composé des morphismes d'adjonction

$$i_*^{p_i!}F_o \rightarrow F_o \rightarrow i_*^{p_i*}F_o$$

est un isomorphisme.

L'unicité résulte de ce que $\operatorname{Hom}(j_{!*}F_{0}',i_{*}F_{0}') = \operatorname{Hom}(i_{*}F_{0}',j_{!*}F_{0}') = 0$. D'après 5.1.2, pour vérifier (i), (ii) et le fait que les flèches de (i) et (ii) sont les injections et projections pour une décomposition du type voulu, il suffit de le vérifier sur X . Par 5.3.8, il suffit de le vérifier pour les constituants simples G de F . Chacun d'eux est de l'une des formes $j_{!*}G'$ ou $i_{*}G''$, ce qui trivialise les assertions.

5.4. Complexes purs.

Soient X_0/\mathbb{F}_q comme en 5.1, et K_0 dans $D_m^b(X_0,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

L'assertion respée est duale de l'assertion non respée, à laquelle nous nous limiterons.

Si le triangle (A_O,B_O,C_O) est distingué, et que A_O et C_O sont de poids \leq w , B_O l'est aussi. Que la condition soit suffisante en résulte : utiliser les triangles (${}^{p}_{\tau_{<i-1}}K_{O}$, ${}^{p}_{\tau_{<i}}K_{O}$, ${}^{p}_{H}{}^{i}K_{O}$ [-i]) .

Supposons donc K de poids \leq w . Nous prouverons par récurrence descendante sur i que ${}^{p}H^{i}K_{o}$ est de poids \leq w+i . Pour i grand, le ${}^{p}H^{i}K_{o}$ est nul, et l'assertion triviale. Supposons donc que ${}^{p}H^{i}K_{o}$ est de poids \leq w+i pour i > n, de sorte que le tronqué ${}^{p}T_{o}$ ${}^{p}K_{o}$ est de poids \leq w . Prouvons ${}^{p}H^{n}K_{o}$ de poids \leq w+n .

Pour simplifier les notations, nous supposerons que $\ w$ = n = 0 ; on pourrait se ramener à ce cas par torsion et décalage.

Le triangle distingué $({}^{p}_{\tau}{}_{\leq 0}K_{o}, {}^{K}_{o}, {}^{p}_{\tau}{}_{> 0}K_{o})$ montre que ${}^{p}_{\tau}{}_{\leq 0}K_{o}$ est de poids \leq 0 . Le triangle $({}^{p}{}_{\tau}{}_{< 0}K_{o}, {}^{p}{}_{\tau}{}_{\leq 0}K_{o}, {}^{p}{}_{H}{}^{O}K_{o})$ fournit des suites exactes

$$\text{(5.4.1.1)} \qquad \qquad \text{H}^{-d} \, (^p_{\tau_{\leq O}} \text{K}_o) \ \rightarrow \ \text{H}^{-d} \, (^p_{H^o} \text{K}_o) \ \rightarrow \ \text{H}^{-d+1} (^p_{\tau_{\leq O}} \text{K}_o) \ .$$

Pour Y une sous-variété irréductible de dimension d de X , il existe un ouvert dense U de Y tel que la restriction de $\mathrm{H}^{-d+1}(^{\mathrm{P}}_{\mathsf{T}}{}_{<\mathrm{O}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{O}})$ à U soit nulle. D'après (5.4.1.1), les poids ponctuels de $\mathrm{H}^{-d}(^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{H}}{}^{\mathrm{O}}{}_{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{O}})$ sont $<\!\!$ -d sur U D'après 5.3.7, $^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{H}}{}^{\mathrm{O}}{}_{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{O}}$ est de poids \leq O . Ceci achève la démonstration.

Résulte de 5.4.1 et 5.1.14.

Grâce à 5.4.2, la première démonstration de 5.3.2 s'applique.

D'après 5.4.4 et 5.1.15 (iii), la flèche de degré un des triangles distingués (${}^p\tau_{<\mathbf{i}}K_O,{}^p\tau_{<\mathbf{i}}K_O,({}^pH^{\mathbf{i}}K_O)$ [-i]) a une image nulle dans $\mathrm{Ext}^1({}^pH^{\mathbf{i}}K[-\mathbf{i}], {}^p\tau_{<\mathbf{i}}K)$. On a donc

$$P_{\tau_{\leq \dot{\mathbf{I}}}K} \simeq P_{\tau_{\leq \dot{\mathbf{I}}}K} \oplus P_{H^{\dot{\mathbf{I}}}K[-\dot{\mathbf{I}}]}$$
,

et 5.4.5 en résulte.

Combinant 5.4.4, 5.4.5 et 5.3.7, on obtient le

Les corollaires suivants de 5.4.6 généralisent respectivement le théorème global et le théorème local des cycles invariants.

$$(5.4.7.1) \qquad \qquad H^{\dot{1}}(X,K) \, \, \xrightarrow{} \, \, \, \, \, \prod_{\eta} (H^{\dot{1}}K) \frac{\text{Gal}(\overline{\eta}/\eta)}{\eta} \, \, .$$

Dans (5.4.7.1), le $H^{\dot{1}}$ à gauche désigne un groupe d'hypercohomologie. A droite, $H^{\dot{1}}$ désigne un faisceau de cohomologie (usuel).

Il suffit de vérifier(5.4.7.1) pour K de la forme $(j_{!*}L[d])[n]$ de 5.4.6. Au plus un des n peut être dans U . Si aucun ne l'est, ou que $i \neq -d-n$, le membre de droite est nul. Pour $n \in U$ et i = -d-n, on a

$$H^{i}(j_{!*}L[d][n]) = {}^{O}j_{*}L$$

et $H^{j} = 0$ pour j < i, de sorte que 5.4.7 se ramène à

$$H^{\circ}(X, {\circ j_{*}L}) \longrightarrow (L_{\overline{\eta}})^{\operatorname{Gal}(\overline{\eta}/\eta)}$$
.

Le membre de gauche s'identifie à $\operatorname{H}^{\circ}(U,L)$, et la flèche est même un isomorphisme.

$$H^{i}(X_{x},K) = (H^{i}K)_{x} \xrightarrow{N} \prod_{\eta} (H^{i}K) \frac{Gal(\overline{\eta}/\eta)}{\overline{\eta}}$$
.

Procédant comme en 5.4.7, on se ramène à prendre $K = j_{!*} \iota[d][n]$ et, notant U_X l'image inverse de U dans X_X , à vérifier que pour chaque composante connexe U_X' de U_X

$$H^{O}(U_{x}', L) \longrightarrow (L_{n})^{Gal(\overline{\eta}/\eta)}$$

si $\eta \in U_{_{\mathbf{X}}}^{1}$. Cette flèche est un isomorphisme.

- (a) Pour x point géométrique d'un ouvert U de X sur lequel les ${\rm H}^{\dot{1}} f_* L_o$ sont lisses , ${\rm H}^* (Y,L)$ s'envoie sur la partie de ${\rm H}^* (Y_X,L)$ (où $Y_X = f^{-1}(x))$ fixe par la monodromie (i.e. fixe sous l'action de $\pi_1 \, (U,x))$.
- (b) Pour x dans X , et $\overset{\sim}{\mathbf{x}}$ un point générique géométrique du

localisé strict X (x) , H*(Y ,L) s'envoie sur la partie de H*(Y ,L) X fixe par la monodromie locale.

5.4.10. Soit $f: X_o \to Y_o$ un morphisme projectif, et $\ell \in H^2(X_o, \mathbb{Q}_{\ell}(1))$ la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample. Quel que soit K_o dans $D^b(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, ℓ définit un morphisme de K_o dans K_o [2](1). Itérant, on obtient $\ell^n: K_o \to K_o$ [2n](n). Appliquant f_* , on obtient $\ell^n: f_*K_o \to f_*K_o$ [2n](n) et des morphismes $\ell^n: f_*K_o \to \ell^n$ $\ell^n: f_*K_o \to \ell^n$ [2n](n) et des morphismes $\ell^n: f_*K_o \to \ell^n$ $\ell^n: f_*K_o$ [2n](n).

Le théorème suivant est une généralisation au cas relatif de [1] (6.2.13).

 $\frac{\text{Th\'eor\`eme 5.4.10. (Th\'eor\`eme de Lefschetz difficile relatif). Si}{\text{est un faisceau pervers pur sur}} \;\; \text{X}_{\text{O}} \;\; , \; \underbrace{\text{pour tout}} \;\; i \; \geq \; 0 \;\; , \; \underbrace{\text{le morphisme}}_{\text{o}} \;\; \text{Pour tout}$

$$\ell^{i}: {}^{p_{H}^{-i}}f_{*}F_{o} \rightarrow {}^{p_{H}^{i}}f_{*}F_{o}(i)$$

est un isomorphisme.

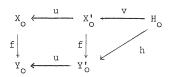
Le problème est local sur Y . Rapetissant Y et remplaçant ℓ par un multiple, on peut supposer et on suppose que f admet une factorisation X $_0 \begin{picture}(200,0) \put(0,0){\line(0,0){100}} \pu$

Preuve pour i = 1. Dans le cas où Y_O est un point, la démonstration de [1] consistait à prendre une section hyperplane assez générale H de X , à regarder ℓ comme le composé d'un morphime de restriction et d'un morphisme de Gysin :

$$H^{-1}(X,F) \xrightarrow{v^*} H^{-1}(H,F) \xrightarrow{v_!} H^1(X,F)(1)$$

à montrer que v^* identifie $H^{-1}(X,F)$ à la partie de $H^{-1}(H,F)$ fixe par la monodromie (quand H varie) et que dualement $v_!$ identifie $H^1(X,F)$ (1) aux coinvariants de la monodromie, et à utiliser la semi-simplicité de la représentation de monodromie pour en déduire que $v_!v^*$ est un isomorphisme. La stratégie sera la même ici, à ceci près qu'on utilisera non pas une section hyperplane, mais la famille universelle de sections hyperplanes.

Soient $\stackrel{\checkmark}{P}_{0}^{d}$ l'espace projectif dual de $\stackrel{\dagger}{P}_{0}^{d}$, $\stackrel{\checkmark}{Y}_{0}^{i} = \stackrel{\checkmark}{P}_{0}^{d} \times \stackrel{\checkmark}{Y}_{0}$, $\stackrel{\checkmark}{X}_{0}^{i} = \stackrel{\checkmark}{P}_{0}^{i} \times \stackrel{\checkmark}{Y}_{0}^{i}$, $\stackrel{\checkmark}{X}_{0}^{i} = \stackrel{\checkmark}{P}_{0}^{i} \times \stackrel{\checkmark}{Y}_{0}^{i}$, de sections hyperplanes de $\stackrel{\checkmark}{X}_{0}$: la fibre en $(a,y) \in Y'$ de $\stackrel{\dagger}{H}/Y'$ est la section hyperplane $\stackrel{\checkmark}{X}_{Y}$ $\stackrel{\dagger}{N}$ "a" de la fibre $\stackrel{\checkmark}{X}_{Y}$ en $\stackrel{\checkmark}{Y}$ de $\stackrel{\dagger}{X}/Y$:



Prendre garde que des flèches distinctes sont notées par le même symbole. Le contexte empêchera toute ambiguité.

<u>Lemme</u> 5.4.11. <u>Soit</u> K <u>dans</u> $p_{D_{\underline{C}}^{>0}}(x,\overline{q}_{\ell})$.

- (i) On a $u*f_*K \xrightarrow{\sim} f_*u*K$, et donc $(u*^pH^if_*K)[d] \xrightarrow{\sim} {}^pH^{i+d}f_*u*K$.
- (ii) Pour i < d-1, on a $p_H^i f_* u * K \xrightarrow{\sim} p_H^i h_* (uv) * K$.
- (iii) On a ${}^pH^{d-1}f_*u^*K \longrightarrow {}^pH^{d-1}h_*(uv)^*K$, et ${}^pH^{d-1}f_*u^*K$ s'identifie au plus grand sous-faisceau pervers de ${}^pH^{d-1}h_*(uv)^*K$ qui provient de Y (décrit en 4.2.6).

Les morphismes u sont lisses purement de dimension relative d. De là, la t-exactitude de u*[d] (4.2.4), et(i) . Soit g la projection sur Y' de U = X'-H . C'est un morphisme affine, u*K est dans ${}^{p}D^{\geq d}(X')$, et g_!(u*K|U) est donc (4.1.2) dans ${}^{p}D^{\geq d}(Y')$. Le triangle (g_!(u*K|U) , f_{*}u*K,h_{*}(uv)*K) fournit dès lors (ii) , et l'assertion d'injectivité de (iii). Pour vérifier (iii), il reste (cf. 4.2.6) à montrer que

$$\text{(5.4.11.1)} \quad {^{p}_{H}}^{-d}u_{*}{^{p}_{H}}^{d-1}f_{*}u^{*}K \xrightarrow{\sim} {^{p}_{H}}^{-d}u_{*}{^{p}_{H}}^{d-1}h_{*}\text{(uv)*}K \ .$$

Pour d = 0 , f $\,$ est un plongement fermé, $\,$ H = Ø , et les deux membres sont nuls. Nous supposerons $\,$ d > 1 .

 $D_{C}^{b}(X,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} i : \overset{d}{\underset{i=0}{\oplus}} K[-2i](-i) \xrightarrow{\sim} q_*q^*K.$$

Par passage aux fibres, on se ramène au cas où X est un point. Par dévissage, on se ramène alors au cas $K=\overline{\mathbb{Q}}_{\chi}[0]$, et le lemme est la structure connuede la cohomologie de l'espace projectif.

5.4.13. Preuve de (5.4.11.1) (d \geq 1). Appliquons 5.4.12 à u et à uv . On a

Les deux ne diffèrent que par le facteur direct $f_*K[-2d](-d)$.

Les fibres de f sont de dimension \leq d . On a donc $f_* \text{K} \in {}^p D_C^{\geq -d} (Y, \overline{\mathbb{Q}}_{\chi})$ (4.2.4) et ${}^p H^i u_* f_* u^* \text{K} \xrightarrow{\sim} {}^p H^i u_* h_* (uv)^* \text{K}$ pour $i \leq d-1$, en particulier pour $i \leq 0$.

Les triangles $(\tau_{< d-1}L, L, \tau_{\leq d-1}L)$ pour $L = f_*u^*K$ et pour $L = h_*(uv)^*K$ fournissent par application de u_* deux triangles et un morphisme de triangles

On a d'après (ii) $p_{\tau < d-1} f_* u^* K \xrightarrow{\sim} p_{\tau < d-1} h_* (uv)^* K$. Comparant les suites exactes longues de cohomologie perverse de deux triangles cidessus, on obtient

$$p_{H}^{-1}u_{*}p_{\tau_{\geq d-1}f_{*}u^{*}K} \xrightarrow{\sim} p_{H}^{-1}u_{*}p_{\tau_{\geq d-1}h_{*}(uv)^{*}K}$$
.

Puisque u_* est d'amplitude cohomologique \geq -d , on a $^pH^{-1}u_*^pT_{>d-1} = ^pH^{-d}u_*^pH^{d-1}$, d'où(5.4.11.1).

5.4.14. Preuve de 5.4.10 (i=1).

11/12

Dualement au morphisme de restriction

$$(u^*p_H^{-i}f_*F)$$
 [d]= $p_H^{-i}f_*(u^*F[d]) \longrightarrow p_H^{-i+1}h_*((uv)^*F[d-1])$,

on dispose d'un morphisme de Gysin :

$$p_{H_{j}}h_{k}((uv)*f[d-1]) \longrightarrow u*(p_{H_{j}}+1_{f_{*}}f)[d](1)$$

et leur composé (pour j = -i+1) est le u*[d] de l'application ℓ .

Pour i = 1 , d'après 5.4.ll, $(u^*P_H^{-1}f_*F)[d]$ est le plus grand sous-objet de $^{p}H^{O}h_*((uv)*F[d-1])$ qui provient de Y . Dualement, $(u^*P_H^{-1}f_*F)[d](1)$ est le plus grand quotient $^{p}H^{O}h_*((uv)*F[d-1])$ qui provient de Y . Puisque F_O et donc (5.1.l4) $(uv)*F_O$, $h_*((uv)*F_O)$ et donc (5.4.l) $^{p}H^{O}h_*((uv)*F_O)$ sont purs , $^{p}H^{O}h_*((uv)*F[d-1])$ est semi-simple (5.3.7) et son plus grand sous-objet qui provient de Y s'envoie isomorphiquement sur son plus grand quotient qui provient de Y : le $u^*[d]$ de & (pour i = 1) est un isomorphisme, et donc & lui-même est un isomorphisme.

5.4.15. Preuve de 5.4.10 (fin). On procède par récurrence sur i . Le cas i=0 est trivial, et le cas i=1 vient d'être traité. Pour $i\geq 1$, on écrit le $u^*[d]$ de ℓ^{i+1} comme le composé

$$(u^* p_H^{-i-1} f_* F) [d] \to p_H^{-i} h_* ((uv)^* F[d-1]) \xrightarrow{g^i} p_H^i h_* ((uv)^* F[d-1])(i) \to$$

$$\underbrace{Gysin}_{} (u^* p_H^{i+1} f_* F) [d] (i+1) .$$

La première flèche est un isomorphisme d'après 5.4.ll(i) (ii) . La dernière en est duale, et celle du milieu est un isomorphisme, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à h et à $(uv)*F_{c}[d-1]$.

6. DE IF À C.

Notre but dans ce paragraphe est d'expliquer et de justifier des recettes pour déduire d'énoncés vrais sur la clôture algébrique d'un corps fini (tels ceux de 5.3 et 5.4) des énoncés sur Γ .

6.1. Principes.

6.1.1. Pour déduire un énoncé géométrique, relatif aux variétés algébriques complexes, d'un énoncé sur IF , on procède en deux étapes, avec pour intermédiaire un énoncé sur C , mais où la topologie du corps de base C n'apparaisse pas. S'il s'agit d'énoncés cohomologiques ou homotopiques, on obtient exténoncé en remplaçant la topologie classique des variétés algébriques complexes par la topologie étale, et les coefficients \mathbb{Z}/ℓ , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{C} par \mathbb{Z}/ℓ , \mathbb{Z}_{ℓ} , \mathbb{Q}_{ℓ} , \mathbb{Q}_{ℓ} . La traduction n'est pas toujours possible:

-La topologie étale ne détecte pas le π_1 , mais (du moins pour une variété normale) seulement son complété pro-fini $\hat{\pi}_1$. Si π_1 est fini, elle détecte les $\hat{\pi}_1 = \pi_1 \otimes \hat{\mathbf{Z}}$ (i>1) , mais si π_1 est infini, les π_1 supérieurs (qui ne sont pas nècessairement de type fini), risquent d'être perdus (cf. Artin-Mazur, Etale homotopy, Springer Lecture Notes in Math. 100).

- La topologie étale n'est raisonnable que pour des coefficients ℓ -adiques. On ne peut prendre pour coefficients ni $\mathbb Z$, ni $\mathbb Q$, ni $\mathbb R$: réseaux entiers, et signatures de formes quadratiques sont perdus.

- La structure de Hodge (ou de Hodge mixte) de la cohomologie est perdue en cohomologie ℓ -adique. Noter toutefois que la définition de la filtration par le poids de $H^*(X,\mathbb{Q})$ est géométrique. Cette filtration admet donc un analogue ℓ -adique. Pour une application, voir 6.2.3.

Par ailleurs, il faut qu'il s'agisse de variétés et d'applications <u>algébriques</u> (et non seulement analytiques) complexes. Par exemple, les résultats de 5.3., 5.4 nous fournirons des théorèmes sur les variétés projectives dont l'analogue pour les variétés kahlériennes n'est pas connu.

6.1.2. Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb C$. Reliant l'espace topologique $X(\mathbb C)$, et la topologie étale de X , on dispose du morphisme de comparaison (un morphisme de topos)

$$\epsilon : X(\mathbb{C}) \longrightarrow X_{et}$$

Les résultats essentiels sont les suivants.

(A) Le foncteur $\[\epsilon^* \]$ induit une équivalence de la catégorie des faisceaux d'ensembles constructibles sur $\[X_{\mbox{et}} \]$ avec la catégorie des faisceaux d'ensembles constructibles sur $\[X(\mbox{C}) \]$ (où "constructible" signifie "localement constant et à fibres finies sur chaque strate d'une stratification $\[\mbox{algébrique} \]$ "). Variantes :

(A') Pour R un anneau fini, on a une équivalence de catégories $\stackrel{*}{\epsilon}:$ (faisceaux constructibles de R-modules sur ${\rm X}_{\mbox{\rm et}}) \xrightarrow{\sim}$ (faisceaux constructibles de R-modules sur ${\rm X}(\mathbb{C})$) .

(A") Pour tout nombre premier ℓ , on a une équivalence de catégories ϵ^* : $(\mathbb{Z}_{\ell}^-$ faisceaux constructibles sur X_{et}) $\xrightarrow{\sim}$ (faisceaux constructibles de \mathbb{Z}_{ℓ}^- modules sur $X(\mathbb{C})$).

Pour les \mathbb{Q}_{χ} -faisceaux, ε^* est seulement pleinement fidèle. Sur une variété normale connexe X, munie d'un point base $x \in X(\mathbb{C})$, un faisceau localement constant F de \mathbb{Q}_{χ} -espaces vectoriels de rang fini est dans l'image essentielle si et seulement si l'action de $\pi_1(X(\mathbb{C}),x)$ sur F_X stabilise un réseau (= un \mathbb{Z}_{χ} -sous-module de type fini de F_X qui l'engendre). Pour F localement constant sur chaque strate d'une stratification (au sens 2.1) à strates normales connexes S, il faut la même condition sur chaque $F \mid S$ ($S \in S$). De même pour les E_{χ} - et $\overline{\mathbb{Q}}_{\chi}$ -faisceaux. Noter toutefois que, les groupes π_1 étant de génération finie, si F est un faisceau constructible d'espaces vectoriels sur \mathbb{Q} , pour presque tout ℓ , $F \otimes \mathbb{Q}_{\chi}$ est dans l'image essentielle de ε^* . Plutôt que d'utiliser cette remarque pour ramener l'étude de faisceaux constructibles au cas ℓ -adique, il est souvent plus commode de ramener l'énoncé à démontrer au cas (Λ). Pour un exemple, voir 6.2.1.

Des énoncés analogues valent pour les catégories dérivées :

- (B') Pour R un anneau fini, on a une équivalence de catégories $\epsilon^*: D^b_c(X,R) \xrightarrow{\hspace{1cm} \sim} D^b_c(X(C),R) \text{ . L'indice } c \text{ est pour: "à faisceaux de cohomologie constructibles".}$
- (B") On a $\varepsilon^*: D^b_c(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\sim} D^b_c(X(\mathfrak{C}), \mathbb{Z}_{\ell})$. A gauche, il s'agit d'une catégorie triangulée définie comme 2-lim proj $D^b_{ctf}(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ (t.f. := tor-dimension finie). A droite, d'une sous-catégorie de la

catégorie dérivée usuelle.

En Φ_{ℓ} -cohomologie, à nouveau, on dispose seulement d'un résultat de pleine fidélité. Pour que K soit dans l'image essentielle, il faut et suffit que ses faisceaux de cohomologie le soient. De même pour la E,- et la $\overline{\Phi}_{\ell}$ -cohomologie.

Le foncteur ϵ^* commute aux opérations cohomologiques usuelles, du moins tant qu'on se limite aux faisceaux constructibles. Le résultat essentiel est SGA4 XVI 4.1 :

(C) Si f: X \to Y est un morphisme de schémas de type fini sur C , pour tout faisceau constructible de torsion F sur X , on a

$$\epsilon^* R^q f_* F \xrightarrow{\sim} R^q f_* (\epsilon^* F)$$
.

Il est essentiel ici de supposer F constructible, comme le montre l'exemple suivant : X = droite affine, Y = Point, F = $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}$ $(\mathbb{Z}/{^1}\mathbb{Z})_n$.

De ce résultat, on déduit formellement que

(C') En \mathbb{Z}/ℓ^n , \mathbb{Z}_ℓ , \mathbb{Q}_ℓ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ cohomologie, i.e. quand on travaille dans les catégories dérivées constructibles bornées correspondantes, ϵ^* commute aux foncteurs Rf_* , $\mathrm{Rf}_!$, f^* , $\mathrm{Rf}^!$, ainsi qu'aux \mathbb{Z}^L et RHom.

Preuves . Le résultat-clef est SGA4 XVI 4.1 : théorème de comparaison pour Rqf. . Il vaut aussi pour des faisceaux constructibles d'ensembles (resp. de groupes) si q = 0 (resp. q = 0 ou 1). Pour les faisceaux d'ensembles localement constants, (A') résulte du théorème de comparaison pour π_0 et π_1 (déduit de SGA4 XVI 4.1, q = 0,1 où on fait S = Spec(C)) . Pour passer de là au cas général, on procède par récurrence noethérienne ; si U est un ouvert dense, assez petit pour que les faisceaux considérés soient localement constants sur U , et F le fermé complémentaire : $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i}$ F , on utilise que la donnée d'un faisceau F sur X équivaut à celle d'un faisceau $F_{_{\rm II}}$ sur U , d'un faisceau ${\it F}_{_{\rm F}}$ sur ${\it F}$, et d'un morphisme de recollement $F_{\rm F} \longrightarrow i^*j_*F_{\rm H}$ - ceci tant pour la topologie classique que pour la topologie étale. Puisque l'hypothèse de récurrence s'applique à F , que les faisceaux considérés sont localement constants sur U , et qu'on dispose du théorème de comparaison pour j_* , cela suffit pour conclure.

Les opérations cohomologiques usuelles $(f^*,Rf^!,Rf_*,Rf_!)$, se ramènent à f_i pour f un plongement, et f^* , Rf_* pour tout f:

 ${\rm Rf}_{\,!}$: on écrit f = gh , avec g propre et h un plongement ouvert. On a ${\rm Rf}_{\,!}$ = ${\rm Rg}_{\,*}h_{\,!}$.

Rf 1 : on écrit f = gh , avec g lisse et h un plongement fermé. On a Rf 1 = Rh 1 Rg 1 . Le théorème de dualité de Poincaré calcule Rg 1 en fonction de g * : Rg 1 K = g * K[2d](d) , pour g purement de dimension relative d . Enfin, si j est l'inclusion de l'ouvert complément de l'image de h, on contrôle Rh 1 à l'aide de Rj $_*$, grâce au triangle (h $_*$ Rh 1 , Id, Rj $_*$ j *). Il n'existe peut-être pas de factorisation f=gh du type voulu, mais il en existe localement, et cela suffit, une fois définie la flèche de comparaison (par exemple en termes de l'isomorphisme de comparaison pour Rf $_1$, et des adjonctions (Rf $_1$, Rf 1)).

Le cas de $\underline{RHom}(K,L)$ se ramène par dévissage à celui de Rf_* , de $f_!$ pour f un plongement, et à celui où K est un faisceau localement constant, grâce à la formule

$$Rf_*(RHom(K,Rf^!L)) = RHom(f_!K,L)$$

- 6.1.3. On dispose aussi d'un théorème de comparaison en théorie des cycles évanescents. Pour l'énoncé, je renvoie à SGA7 XIV 2.8.
- 6.1.4. Dans cette première étape : oubli de la topologie de $\, {\, \rm C} \,$, il importe de tenir compte des twists à la Tate :
- Pour X de dimension d , la classe fondamentale est un morphisme $\mathtt{H}^{2d}_{\mathtt{C}}(\mathtt{X}, \mathbb{Z}/{^{\!\!\!/}}^n(\mathtt{d})) \longrightarrow \mathbb{Z}/{^{\!\!\!/}}^n$.
- Pour X lisse dans Y lisse, purement de codimension d , le morphisme de Gysin est

$$H^{i}(X, \mathbb{Z}/l^{n}) \longrightarrow H^{i+2d}(Y, \mathbb{Z}/l^{n}(d))$$
,

Pour aider à les reconnaître :

- Ils apparaissent déjà classiquement, du moins modulo 2, si on prend pour \mathbb{C} <u>une</u> clôture algébrique de \mathbb{R} , sans préciser qui est i et qui est -i . Posons en effet \mathbb{Z} (1) = Ker(exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$) = $2\pi i \, \mathbb{Z}$. Un choix de i identifie \mathbb{Z} à \mathbb{Z} (1), par 1 \longmapsto $2\pi i$, et changer i en -i remplace cet isomorphisme par son opposé. De même, un choix de

i définit une orientation de C , puis de toute variété lisse, et changer i en -i renverse l'orientation des variétés de dimension impaire. Dès lors, indépendemment du choix de i , le faisceau d'orientation d'une variété lisse X purement de dimension d s'identifie au faisceau constant de valeur Z (d) := Z (l) d , et la classe fondamentale envoie $\operatorname{H}^{2d}_{C}(X, \operatorname{Z}(d))$ dans Z. La classe fondamentale ℓ adique se déduit de cette classe fondamentale entière, et des isomorphismes déduits de l'exponentielle :

$$\mathbb{Z}$$
 (1) \otimes \mathbb{Z}/n $\stackrel{\sim}{\longrightarrow}$ \mathbb{Z}/n (1) : $z \longmapsto \exp(z/n)$.

- En cohomologie de De Rham, ils correspondent à des $(2\pi i)^d$.
- Mnémotechnique : dans la catégorie dérivée, un twist (d) apparaît souvent accompagné d'un décalage [2d] (exemple : $Rf^!K = f^*K[2d](d)$, pour f lisse de dimension relative d). Noter que l'opération $K \longmapsto K[2d](d)$ préserve les poids.
- 6.1.5. L'application de l'arsenal qui précède n'est pas toujours automatique. Soit par exemple la définition de la (co)homologie d'intersection en termes de chaînes singulières dont l'intersection, et celle de leur bord, avec les strates d'une stratification convenable n'a pas une dimension trop grande. Elle ne se prête pas, telle quelle, à une traduction en cohomologie étale, mais, une fois qu'on a identifié la cohomologie d'intersection à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(X,j_{]*}(\mathbb{Q}[d]))$ (j l'inclusion d'un ouvert lisse dense de dimension d) , avec pour $j_{]*}$ la description 2.1.11, la traduction est immédiate.
- 6.1.6. Avant d'aborder la deuxième étape : de $\mathbb C$ à $\mathbb F$, pour des énoncés où la topologie de $\mathbb C$ n'apparaît pas, et bien que ce ne soit pas logiquement nécessaire, nous allons montrer sur un exemple la méthode suivie pour passer d'une variété sur $\mathbb C$ à une qui est définie sur un corps de nombres.

Soit X une variété projective complexe. Elle est définie, dans $\mathbb{P}^n\left(\mathfrak{C}\right)$, par une famille finie d'équations homogènes $P_{\alpha}=0$. Soient a les coefficients de P_{α} . Si on traite les a comme des indéterminées, les P_{α} définissent une famille de variétés projectives, paramétrées par un espace affine S: on a obtenu un morphisme projectif $f:Y\to S$ dont X est la fibre au point s de S de coordonnées les valeurs originales des a ce morphisme $f:Y\to S$ provient par extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{C} d'un morphisme de

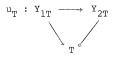
schémas sur Q . Comme nous dirons, il est défini sur Q .

Soit $f:Y\to S$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur $\mathbb Q$. Il existe alors une stratification T de S (définie sur $\mathbb Q$), telle que, pour chaque strate $\mathbb T$, le morphisme $f_T:Y_T\to \mathbb T$ déduit de f par restriction à $\mathbb T$, soit à fibres "topologiquement localement constantes" - par exemple au sens que $Y_T(\mathbb C)\to \mathbb T(\mathbb C)$ est une fibration topologiquement localement triviale. Ceci résulte du théorème d'isotopie de Thom, et de ce que les conditions de Whitney admettent une formulation algébrique (voir J.L. Verdier, Inventiones $\underline{36}$ (1976) p. 295-312, cor. 5.1).

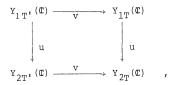
Chaque composante connexe de chaque strate admet un point défini sur un corps de nombres. Si s $\in S(\mathfrak{C})$, et que t , dans la même composante connexe de la même strate que s , est défini sur un corps de nombre, Y_s et Y_t sont donc homéomorphes. Soit à prouver, par exemple, le théorème de Lefschetz difficile en cohomologie d'intersection pour une variété projective complexe X = Y_s , le connaissant pour Y_t . La variété X , munie de la première classe de Chern ℓ de $\mathcal{O}(1)$, sera homéomorphe à (Y_t,ℓ) , d'où l'assertion. Cet argument utilise l'invariance topologique de la cohomologie d'intersection ([6]). On pourrait s'en dispenser en travaillant sur Y , muni d'une stratification convenable.

Souvent, on s'intéresse non pas à une variété X , mais à un morphisme $u: X_1 \longrightarrow X_2$. Ici encore, on peut trouver un diagramme défini sur $\mathfrak Q:$

dont u se déduit par passage aux fibres en s \in S(C). On prendra garde qu'il n'existe en général aucune stratification T de S, telle que le type topologique de u_t: f_1^-1(t) \longrightarrow f_2^-1(t) soit constant pour t dans une composante connexe d'une strate : le type topologique peut varier continûment. Il existe toutefois des stratifications T de S , définies sur Q , telles que, après changement de base de S à T , le morphisme



ait la propriété suivante : quel que soit $\, {\tt T}^{\, \prime} \, \to \, {\tt T} \,$, donnant lieu à un diagramme cartésien



et le système local $\ensuremath{\text{L}}$ sur $\ensuremath{\text{Y}}_{\ensuremath{\text{T}}\ensuremath{\text{T}}}(\ensuremath{\mathbb{C}})$, on a

$$v^* R^q u_{\downarrow} L \xrightarrow{\sim} R^q u_* v^* L$$

Ce résultat, convenablement amplifié (cf. les réductions en 6.1.2), suffit en pratique.

6.1.7. On trouve dans EGA IV §§ 8,9 des listes de résultats du type suivant. Soient A un anneau (commutatif) limite inductive d'anneaux A_i et supposons pour simplifier A et les A_i noethériens. Tout objet X "de présentation finie" sur Spec(A) (par exemple : schéma de type fini, morphisme entre tels, faisceau cohérent sur un tel,...) provient d'un objet analogue X_i sur l'un des Spec(A_i); deux choix de X_i fournissent le même $X_j := X_i \times_{\text{Spec } A_j}$ Spec A_j pour j assez grand. Pour que X/Spec A ait une propriété "relative" P, stable par changement de base, il faut et il suffit que X_j /Spec A_j l'ait pour j grand.

Le cas qui nous intéresse est celui où A = C est écrit comme limite inductive de ses sous-anneaux de type fini sur ${\bf Z}$.

 $\begin{array}{c} \underline{\text{Variante}} \text{ . Pour tout anneau } \text{ A} \subset \mathbb{C} \text{ de type fini sur } \mathbb{Z} \text{ il existe} \\ \text{f} \neq \text{O} \text{ dans } \text{A} \text{ tel que } \text{Spec } (\text{A[1/f]}) \text{ soit lisse sur } \text{Spec } \mathbb{Z} \text{ . Remplaçant l'ensemble ordonné filrant des sous-anneaux de } \mathbb{C} \text{ de type fini sur } \mathbb{Z} \text{ par une partie cofinale } \text{I} \text{ , on a encore } \mathbb{C} = \lim \text{ ind } \text{A}_{\underline{i}} \text{ , pour un système inductif } \text{A}_{\underline{i}} \text{ dans lequel les } \text{S}_{\underline{i}} := \text{Spec}(\text{A}_{\underline{i}}) \text{ sont lisses sur Spec } \mathbb{Z} \text{ .} \end{array}$

On trouve que tout schéma X de type fini sur $\mathbb C$ provient d'un X_i/S_i , que si X,Y proviennent de $X_i,Y_i/S_i$, un morphisme (resp. isomorphisme) $f: X \to Y$ provient de $f_j: X_j \to Y_j$, $j \geq i$ (on a posé $X_j = X_i \times_S S_j$, et de même pour Y), et que deux choix de f_j deviennent égaux sur un S_k ($k \geq j$). En ce sens, X_i est "essentiellement unique pour i grand".

De même, une stratification T de X , un faisceau constructible de $\mathbb{Z}/{\ell}^n$ -modules, un morphisme entre tels faisceaux,... proviennent d'objets analogues sur un X_i , i assez grand, et deux choix sur X_i deviennent égaux sur X_i , $j \geq i$ convenable.

Notation . Pour E un "objet" sur C , on notera E un "objet" sur S = Spec(A), A \subset C de type fini sur Z assez grand, dont E se déduise par extension des scalaires de A à C , et, pour T sur S , on notera E le pull-back de E sur T . Cette notation est ambigue (E n'est en général pas unique) mais ce qui précède assurera que cette ambiguité n'est pas gênante.

Si T est une stratification de X à strates lisses (resp. connexes), quitte à aggrandir S , les strates de T sont lisses sur S (resp. à fibres géométriques connexes). Si le faisceau F sur X est localement constant sur chaque strate, quitte à aggrandir S , il en va de même pour ${\rm F_S}$ sur ${\rm X_S}$.

Soient $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbb C$ et F un faisceau constructible de $\mathbb Z/\imath^n$ -modules sur X. Soient $f_S: X_S \longrightarrow Y_S$ et F_S sur X_S , sur $S=\operatorname{Spec}(A)$, comme plus haut. D'après SGA4 1/2 (Th. finitude 1.9), il existe un ouvert non vide $\mathbb U \subset S$ tel que pour tout morphisme de schémas $q: \mathbb U' \longrightarrow \mathbb U$, donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{cccc} x_{U}, & & g & & x_{U} \\ \downarrow^{f} & & & \downarrow^{f} \\ & & & & \chi_{U} \end{array}$$

on ait $g^*R^qf_*f_U \xrightarrow{\sim} R^qf_*g^*f_U$, et que les $R^qf_*f_U$ soient constructibles.

Conséquence : (cf. les réductions en 6.1.2). Etant donnés des schémas

 X_i de type fini sur ${\mathbb C}$, des morphismes entre les X_i , en nombre fini, et des faisceaux constructibles de ${\mathbb Z}/{\mathfrak l}^n$ -modules sur les X_i , en nombre fini, on peut tous les descendre sur $S = \operatorname{Spec}(A)$, $A \subset {\mathbb C}$ de type fini sur ${\mathbb Z}$ assez grand. Quitte à rétrécir S, on peut supposer que les opérations cohomologiques usuelles $(R^*f_*,R^*f_!,f^*,R^*f_!,{\mathbb C})$ et $\underline{\operatorname{Tor}}_p$, $\underline{\operatorname{Ext}}^p$), appliquées un nombre borné de fois aux faisceaux constructibles donnés, fournissent des faisceaux constructibles, et commutent à tout changement de base $S' \to S$. Si a_i est la projection de X_{1S} sur S, on peut aussi supposer que les R^*a_{1*} , appliqués aux résultats de ces opérations, sont localement constants sur S.

6.1.8. Ce qui précède concerne les faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules. Les \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux sont des objets de nature infinie, et ne peuvent pas en général se ramener de \mathbb{C} à S. Par exemple : il existe sur $\mathbb{C}_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, \infty\}$ des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux lisses, de monodromie non quasi-unipotente. Un tel \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceau ne provient pas d'un \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceau sur $\mathbb{C}_{\mathbb{M}_{\mathcal{V}}}$, avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Q} .

Voici une méthode pour contourner cet obstacle. Soient X de type fini sur ${\tt C}$, ${\tt T}$ une stratification (2.1) de ${\tt X}$ à strates lisses et connexes, et [la donnée, pour chaque strate T & T , d'une famille finie L(T) de faisceaux lisses irréductibles de \mathbb{Z}/ℓ - modules. Soit (X_{c}, T_{c}, L_{c}) sur S = Spec(A), $A \subset C$ de type fini sur Z, donnant (X,T,L) par extension des scalaires de A à ${\bf C}$. On suppose S tel que les strates $T \in T_S$ soient lisses sur S à fibres géométriques connexes, que pour F et G de la forme j,L (j: $T \hookrightarrow X_S$ dans T et L dans $L_s(T)$), les $\operatorname{Ext}^q(F,G)$ soient compatibles aux changements de base $S' \rightarrow S$, et que, pour a la projection sur S, les $R^{p}a_{\star}Ext^{q}(F,G)$ soient localement constants et compatibles aux changements de base. Soit alors $A \subset V \subset \mathbb{C}$, V un anneau de valuation discrète strictement hensélien dont le corps résiduel est une clôture algébrique d'un corps résiduel fini de A . Pour tout point fermé a de Spec A , il existe un tel V tel que le morphisme Spec V \longrightarrow Spec A envoie sur a le point fermé de Spec V : prendre un "arc analytique", quotient de dimension 1 du complété ${\tt A}_{\sf a}^{\wedge}$, qui ne soit contenu dans l'image inverse dans Spec A_a^{Λ} d'aucun fermé non trivial de Spec A , normaliser et henséliser strictement. Soient $(X_{\mathbf{U}}, T_{\mathbf{U}}, L_{\mathbf{U}})$ déduit de (X_S, T_S, L_S) par changement de base, et (X_S, T_S, L_S) la fibre spéciale. Soit le diagramme de schémas

$$X \xrightarrow{u} X_{V} \leftarrow i X_{S}$$

Soit $D^b_{T,L}(X,\mathbb{Z}_\ell)$ la sous-catégorie de $D^b_{\mathbf{c}}(X,\mathbb{Z}_\ell)$ formée des K tels que les H^1K , réduits mod ℓ et restreints à chaque strate T, soient localement constants et à constituants dans L(T). Soient de même $D^b_{T,L}(X_V,\mathbb{Z}_\ell)$ et $D^b_{T,L}(X_S,\mathbb{Z}_\ell)$.

Lemme 6.1.9. Avec les notations ci-dessus, les foncteurs

$$D_{T,L}^{b}(x, \mathbf{Z}_{\ell}) \stackrel{u^{*}}{\longleftarrow} D_{T,L}^{b}(x_{V}, \mathbf{Z}_{\ell}) \stackrel{i^{*}}{\longleftarrow} D_{T,L}^{b}(x_{S}, \mathbf{Z}_{\ell})$$

sont des équivalences de catégories.

世就

L'énoncé analogue, avec \mathbf{Z}_{ℓ} remplacé par \mathbf{Z}/ℓ^n , est conséquence formelle de ce que, pour \mathbf{F} et \mathbf{G} comme en 6.1.8, les $\mathbf{H}^{\mathrm{D}}(-,\underline{\mathbf{Ext}}^{\mathrm{q}}(\mathbf{F},\mathbf{G}))$ sont "les mêmes" sur \mathbf{X} , \mathbf{X}_{V} et \mathbf{X}_{S} . On vérifie que la tor-dimension finie est préservée, et 6.1.9 résulte, par définition des catégories dérivées ℓ -adiques, de l'énoncé obtenu en remplaçant $\mathbf{D}_{\mathsf{T},L}^{\mathsf{D}}(-,\mathbf{Z}_{\ell})$ par $\mathbf{D}_{\mathsf{T},L,t.f.}^{\mathsf{D}}(-,\mathbf{Z}/\ell^n)$ (t.f. pour "tor-dimension finie").

6.1.10. Pour (X, T, L) donné, on obtient donc pour tout $S = \operatorname{Spec}(A)$ assez grand et pour tout V $(A \subseteq V \subseteq C)$ comme ci-dessus une équivalence de catégories

$$(6.1.10.1) D_{T,L}^{b}(x, \mathbf{Z}_{\ell}) \leftrightarrow D_{T,L}^{b}(x_{s}, \mathbf{Z}_{\ell}) ,$$

reliant C à la clôture algébrique d'un corps fini.

Le fait que deux choix de $^{\rm T}_{\rm S}$, $^{\rm L}_{\rm S}$ deviennent égaux quand on aggrandit S peut se formuler de la façon suivante. Soit V l'ensemble des anneaux de valuations discrètes V \subset C , à corps résiduel la clôture algébrique d'un corps fini. Pour A \subset C de type fini sur Z , soit V(A) l'ensemble des V tels que A \subset V . Les V(A) forment un ensemble ordonné filtrant de parties de V (une base de filtre) ; on s'intéressera à des germes selon le filtre correspondant.

Pour X un schéma de type fini sur C , déduit de X_S , S=Spec(A) , par extension des scalaires, le <u>germe</u> du système des X_S (s point fermé de Spec(V) pour $V\in V(A)$) ne dépend que de X (à isomorphisme unique près). De même pour les autres objets "de présenta-

tions finie" considérés. Pour (X,T,L) donné, le <u>germe</u> du système des équivalences de catégories (6.1.10.1) ne dépend de même que de (X,T,L).

Si T',L' raffine T , L le germe du système d'équivalences (6.1.10.1) pour T , L est bien sûr induit par le germe analogue pour (T',L') , mais, puisqu'il ne s'agit que de germes, on ne peut pas passer à la limite pour en déduire des équivalences $D_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X},\mathbf{Z}_{\ell}) \leftrightarrow D_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_{\mathbf{s}},\mathbf{Z}_{\ell})$. On peut seulement affirmer que chaque K dans $D_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X},\mathbf{Z}_{\ell})$ définit un germe de système d'objets $K_{\mathbf{s}}$ dans les $D_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_{\mathbf{s}},\mathbf{Z}_{\ell})$.

Si (T,L) est tel que (a) les strates sont lisses et connexes, (b) pour $j: T \hookrightarrow X$ une strate, $L \in L(T)$ et $T' \in T$, les $R^{Q}j_{*}L|T'$ sont localement constants à constituants dans L(T'), on peut prendre S tel que les mêmes propriétés valent sur S, et que les $R^{Q}j_{*}L$ commutent à tout changement de base $S' \to S$. Pour toute fonction de perversité p sur T, les équivalences 6.1.9 respectent alors les t-structures de perversité p, et il en va de même pour le germe du système d'équivalences (6.1.10.1).

Utilisant 6.1.7, on peut faire en sorte que les équivalences 6.1.9 (et le germe du système des équivalences (6.1.10.1)) respectent les opérations cohomologiques habituelles. Par exemple, pour T = $\frac{RHom}{T}$ ou 1 , on peut aggrandir chaque (T,L) en un (T',L') tel que T envoie $D^b_{T,L} \times D^b_{T,L}$ dans $D^b_{T',L'}$, puis prendre S tel que pour V comme ci-dessus, les équivalences 6.1.9 respectent le foncteur T . De même, pour f : X \rightarrow Y (ou Y \rightarrow X), on trouvera (T',L') sur Y tel que T = Rf*, Rf! (ou f*,Rf!) envoie $D^b_{T,L}$ dans $D^b_{T',L'}$, et que les équivalences 6.1.9 commutent aux foncteurs T .

En ce qui concerne RHom et $\stackrel{{\rm I\! I\! L}}{\odot}$, tirant profit de ce que L(T) est un ensemble de classes d'isomorphie de faisceaux de ${\rm I\! I\! I}/{\rm I\! L}$ modules, et que ceux-ci ont une monodromie $\stackrel{{\rm finie}}{\rm D}$, on peut plus simplement raffiner (T,L) en (T',L') tel que $\stackrel{{\rm D\! D}}{\rm D}_{T',L'}$ soit stable par RHom et $\stackrel{{\rm I\! I\! L}}{\rm D}$.

Rétrécissant S , on peut aussi supposer que 6.1.10.1, restreint aux faisceaux, respecte :

- la lissité de F: on se ramène au cas de faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules en observant que pour qu'un \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceau soit lisse, il faut et il suffit que le noyau et le conoyau de ℓ : $F \longrightarrow F$ le soient.
- Pour F lisse sur X lisse connexe, la monodromie : rétrécir X pour qu'il n'y ait qu'une strate (ceci ne change pas le groupe de monodromie), et passer à un revêtement fini connexe qui trivialise les éléments de $_L({\rm X})$. Utiliser alors que, puisque X \rightarrow X $_{\rm V}$ et X $_{\rm S}$ \rightarrow X $_{\rm V}$ induisent des isomorphismes sur H $^1(\text{-},\mathbb{Z}/\ell)$, ces morphismes induisent des épimorphismes sur le pro- ℓ -complété du π_1 . Par ailleurs, du système d'équivalences (6.1.10.1) pour les \mathbb{Z}_{ℓ} -catégories dérivées, on déduit aussitôt des systèmes analogues pour les \mathbb{Q}_{ℓ} , E $_{\ell}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -catégories dérivées. Pour vérifier, dans le cas des \mathbb{Q}_{ℓ} -faisceaux, qu'il préserve la lissité on peut utiliser les faits suivants :
- (a) pour que F soit lisse, il faut et il suffit que son image inverse sur le normalisé de $\rm X_{red}$ le soit.
- (b) Soit X normal connexe et j: U \longrightarrow X un ouvert dense. Pour que F sur X soit lisse, il faut et il suffit que ses fibres aient toutes la même dimension, que sa restriction à U soit lisse, et que F $\stackrel{\sim}{\longrightarrow}$ j j *F.

6.2. Exemples

Mil

6.2.1 Dimension cohomologique des schémas affines

$$\text{H}^{\text{N}}(\text{X},\text{F}_{\text{A}}) \otimes_{\text{A}} \text{A/m} = \text{H}^{\text{N}}(\text{X},\text{F}_{\text{A/m}}) \xleftarrow{\sim} \frac{\sim}{(6.1.2)(\text{C})} \text{H}^{\text{N}}(\text{X}_{\text{et}},\text{F}_{\text{A/m}}^{\text{et}}) = \text{O} ,$$

puisque N > d . Ceci valant pour tout m, et $\operatorname{H}^{N}(X, F_{A})$ étant de type fini, on a $\operatorname{H}^{N}(X, F_{A}) = 0$: contradiction. Les $\operatorname{H}^{1}(X, F_{A})$ sont donc nuls pour i > d , et on conclut en utilisant que $\operatorname{H}^{1}(X, F) = \operatorname{H}^{1}(X, F_{A}) \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$.

Remarque . Le résultat obtenu n'est pas satisfaisant : on a $\operatorname{H}^1(X,F)=0$ pour i > $\dim_{\mathbb{C}} X$ dès que X est un espace de Stein, et que F est un faisceau abélien localement constant sur les strates d'une stratification analytique localement finie. Ceci se démontre par une variante convenable de la théorie de Morse.

6.2.2. La filtration par le poids.

Soit X sur C. Pour obtenir la structure de Hodge mixte de la cohomologie de X , on commence par remplacer X par un schéma simplicial muni d'une compactification convenable $X_*{\subset_i}\overline{X}_*([3])$. Un schéma simplicial est un objet de nature infinie : il comporte une infinité de X_1 , et une infinité de flèches. On n'est donc pas assuré de pouvoir en trouver une version sur $S = \operatorname{Spec}(A)$, avec $A \subset C$ de type fini sur \mathbb{Z} . Toutefois, pour étudier les $\operatorname{H}^1(X)$, pour $i \leq n$, il suffit de disposer des X_1 et \overline{X}_1 pour $i \leq n+1$, et le tronqué $(X_1)_{1 \leq n+1} \subset (\overline{X}_1)_{1 \leq n+1}$ peut être descendu à S . La filtration par le poīds $W_{\mathbb{Q}}$ de $\operatorname{H}^*(X(C), \mathbb{Q})$ est l'aboutissement d'une suite spectrale construite à partir de $X_* \subset \overline{X}_*$. La même suite spectrale existe en cohomologie ℓ -adique. La filtration W_{ℓ} de $\operatorname{H}^n(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = \operatorname{H}^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$

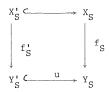
déduite de $W_{\mathbb{Q}}$ persiste donc sur S: pour a : $X_S \to S$, on dispose d'une filtration $W_{\mathbb{Q}}$ de $R^n = \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}$ qui, sur \mathbb{C} , donne $W_{\mathbb{Q}}$. Rétrécissant S , on peut supposer que les conditions imposées aux X_i et \overline{X}_i (i \leq n+1) sur \mathbb{C} persistent sur S (\overline{X}_{iS} propre et lisse sur S , $X_{iS} \subset \overline{X}_{iS}$ complément d'un diviseur à croisements normaux relatifs, surjectivité et propreté de $X_{iS} \longrightarrow (\cos q_{i-1} sq_{i-1}(X_{*S}))_i)$ et que la formation de $W_{\mathbb{Q}}$ (comme aboutissement de telle suite spectrale) commute à tout changement de base. Utilisant la conjecture de Weil, on voit alors qu'en chaque point fermé S de S , $W_{\mathbb{Q}}$ induit la filtration par le poids de $H^n(X_{S},\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}})$, telle que définie arithmétiquement, en terme des valeurs absolues complexes des valeurs propres de Frobenius. Voici une application.

Il suffit de prouver 6.2.3 après tensorisation par Q_{ℓ} , et il s'agit alors de le déduire du théorème [1] 3.4.1 selon lequel si F_{O} est un Q_{ℓ} -faisceau lisse localement constant sur un schéma Y_{O} de type fini sur F_{Q} , et que F_{O} est mixte, le faisceau F_{O} admet une filtration W par des sous-faisceaux lisses, telle que $Gr_{1}^{W}F_{O}$ soit ponctuellement pur de poids i.

La difficulté dans 6.2.3 est que la construction du schéma simplicial compactifié $(\mathbf{X}_{\mathbf{Y}})_*$ qui permet de calculer la filtration par le poids de la cohomologie de $\mathbf{X}_{\mathbf{Y}}=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ ne peut pas toujours être faite uniformément en y . Si on ne considère qu'un schéma simplicial tronqué, il existe toutefois une stratification de Y telle que audessus de chaque strate T la construction puisse être faite uniformément : existence d'un schéma simplicial tronqué compactifié $\mathbf{X}_{*\mathbf{T}} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \overline{\mathbf{X}}_{*\mathbf{T}}$ augmenté vers $\mathbf{X}_{\mathbf{T}}$, vérifiant les analogues relatifs des conditions imposées à $(\mathbf{X}_{\mathbf{Y}})_*$.

Si f: X \longrightarrow Y est descendu en f_S: X_S \longrightarrow Y_S sur S = Spec(A), A \subset C de type fini sur Z, l'hypothèse "Rⁿf_{*} ϕ_{λ} commute au passage aux fibres" s'hérite de f à f_S, après avoir rétréci S. Il existe en effet une stratification T_S de Y_S telle que, pour Y'_S dans T_S , le morphisme f'_S: X'_S = f'_S(Y'_S) \longrightarrow Y'_S vérifie "la formation

de Rf $_{S*}^{l}$ \mathbb{Q}_{ℓ} commute à tout changement de base". La propriété voulue de f $_{S}$ équivaut alors à ce que, pour Y $_{S}^{l}$ dans τ_{S} , les diagrammes cartésiens



donnent lieu à des isomorphismes $u^*R^nf_{S*} \mathbb{Q}_{\ell} \xrightarrow{\sim} R^nf_{S*}^! \mathbb{Q}_{\ell}$. Ce morphisme étant un isomorphisme sur \mathbb{C} , l'est au-dessus d'un ouvert non vide de S, aquel il suffit de rétrécir S.

Combinant ces arguments, on trouve une stratification 7 de Y telle que, après descente à S convenable, chaque $f_S^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}\colon X_S^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}\to Y_S^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}$ pour $Y_S^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}$ dans T_S vérifie :

- a) $R^n f_{S*}^{\bullet} \Phi_{\ell}$ commute au passage aux fibres ;
- b) $R^{n}f_{S*}^{*}\Phi_{\lambda}$ est un faisceau lisse, et admet une filtration par le poids W, par des sous-faisceaux lisses, qui induise sur chaque $H^{n}(X_{Y}, \Phi) \otimes \Phi_{\lambda}$ ($Y \in Y'(\Phi)$) la filtration par le poids, et qui induise au-dessus de chaque point fermé de S la filtration par le poids λ -adique.

Il reste à observer que, pour S convenable, l'équivalence 6.1.10 est telle que si un faisceau lisse F sur Y est muni sur chaque strate T d'une stratification T d'une filtration $W_{\rm T}$, et que F, $W_{\rm T}$ correspondent à F', $W_{\rm T}$, pour que les $W_{\rm T}$ se recollent en une filtration de F par des sous-faisceaux lisses, il faut et il suffit qu'il en aille de même pour F' et les $W_{\rm T}$ (les $W_{\rm T}$ se recollent \Longleftrightarrow les flèches de recollement respectent W; pour la lissité, voir 6.1.10).

 $\underline{\text{Remarque}}$. Nous ne connaissons pas de démonstration de 6.2.3 autre que cette démonstration par voie arithmétique.

- 6.2.4. Soit F un faisceau pervers simple de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur $X(\mathbb{C})$, X un schéma de type fini sur \mathbb{C} . Nous dirons que F est d'origine géométrique s'il appartient au plus petit ensemble qui
- (a) contient le faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$ sur X= un point, et qui est stable par les opérations suivantes.

- (b) Pour f un morphisme de schémas, prendre les constituants des $p_{H^{1}T}$, pour $T = Rf_{*}$, Rf_{*} , Rf_{*}^{*} , $Rf_{*}^{!}$.
- (c) Prendre les constituants des $p_H^i(A \otimes B)$, ou des $p_H^i(A,B)$.

May.

Les sous-catégories des catégories $D_{\mathbf{C}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{X},\mathbf{C})$ formées des K tels que les sous-quotients simples des $^{\mathbf{p}_{\mathbf{H}}\mathbf{i}}(\mathbf{K})$ soient d'origine géométrique sont stables par les opérateurs f_* , $f_!$, f^* , $f^!$, \otimes et R $\underline{\mathsf{Hom}}$. Pour des stabilités qui en résultent, voir . On peut montrer qu'on a aussi stabilité par la construction "cycles évanescents".

Un faisceau pervers F sur X($\mathbb C$) sera dit semi-simple d'origine géométrique s'il est somme directe de faisceaux pervers simples d'origine géométrique. Un complexe K dans $D_{\mathbb C}^b(X(\mathbb C),\mathbb C)$ sera dit semisimple d'origine géométrique s'il est isomorphe à la somme directe de ses $({}^{\mathrm P}\mathrm{H}^{\dot{\mathbf I}}(K))[-\dot{\mathbf I}]$, et que ses ${}^{\mathrm P}\mathrm{H}^{\dot{\mathbf I}}K$ sont semi-simples d'origine géométrique.

Par exemple, si j: U \longleftarrow X est un ouvert de Zariski de X, lisse et connexe de dimension d, et que le système local L sur U a une monodromie finie, j_{!*}L[d] est semi-simple d'origine géométrique, car L est facteur direct de π_* $\mathfrak C$, pour $\pi: \widetilde X \longrightarrow X$ un revêtement fini, et que le faisceau constant $\underline{\mathfrak C}$ sur $\widetilde X$ est image inverse de $\underline{\mathfrak C}$ sur (Point).

Le théorème 6.2.5 équivaut à sa variante, où le corps de coefficients ${\bf C}$ est remplacé par le corps isomorphe $\overline{{\bf Q}}_{\chi}$, puis à celle où la topologie classique est remplacée par la topologie étale.

$$D_{T,L}^{b}(X,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \longleftrightarrow D_{T,L}^{b}(X_{s},\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

- (P) x_s provient par extension des scalaires de x_o/F_q , et F_s de F_o , avec F_o pur.

Que ${\it F}_{s}$ soit pervers simple résulte de 6.1.10. La définition de "d'origine géométrique" étant inductive, il suffit de montrer que la condition (P) est stable par les opérations considérées dans cette définition. Ces opérations commutent aux équivalences considérées. Il reste à savoir que :

- (a) $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ sur (Point) vérifie (P) .
- (b) Les opérations $^{p}H^{i}T$ de 6.2.4 transforment ^{F}S vérifiant (P) en ^{G}S déduit de ^{G}O mixte; les constituants simples de ^{G}O sont purs (5.3.4) et par 6.1.9, 6.1.10 ceux de ^{G}O vérifient (P).
- (c) De même pour ⊗ et R Hom.
- 6.2.7. Preuve de 6.2.5 . Il suffit de traiter le cas où K est un faisceau pervers F . Appliquons 6.2.6. On trouve que F vérifie (P). Appliquons 5.4.5,5.3.8 . On trouve que Rf $_{\ast}$ est somme directe de ses $^{\rm PH^{i}}[-i]$, et que ceux-ci sont semi-simples. D'après 6.1.10, les mêmes propriétés valent pour Rf $_{\ast}$ F , et ceci prouve 6.2.5.

$$(6.2.8.1) Hi(X,K) \longrightarrow HO(V,Hif,K) .$$

En particulier, pour V connexe et $y \in Y$, posant $X_y = f^{-1}(y)$, $\pi_1(V,y)$ agit sur $(H^if_*K)_y \xrightarrow{\sim} H^i(X_y,K)$, et (6.2.8.1) se récrit (6.2.8.2) $H^i(X,K) \longrightarrow H^i(X_y,K)$.

Corollaire 6.2.9. (théorème local des cycles invariants). Soient $f: X \longrightarrow Y \quad \underline{un \; morphisme \; propre}, \quad K \quad \underline{dans} \quad D^b_c(X,\mathbb{C}) \quad \underline{et} \quad y \in Y \; . \; \underline{Soit}$ $V \quad \underline{un \; ouvert \; (de \; Zariski) \; de} \quad Y \; , \; \underline{sur \; lequel} \quad H^if_*K \quad \underline{est \; localement}$ $\underline{constant. \; Pour \; B} \quad \underline{une \; boule \; assez \; petite \; de \; centre} \quad y \; , \; \underline{et} \quad j \quad \underline{l'inculation \; de} \quad B \cap V \quad \underline{dans} \quad B \; , \; \underline{on} \; a$

$$H^{O}(B \cap V, H^{i}f_{*}K) = (j_{*}j^{*}H^{i}f_{*}K)_{Y}$$
,

$$\frac{\text{et}}{\text{H}^{\text{O}}(\text{B},\text{H}^{\text{i}}\text{f}_{*}\text{K}) - \sim \text{H}^{\text{i}}\text{f}_{*}\text{K})_{\text{y}} = \text{H}^{\text{i}}(\text{X}_{\text{y}},\text{K})}$$

 $\underline{\text{Si}}$ K est semi-simple d'origine géométrique, pour un tel B , $\underline{\text{on a}}$

$$(6.2.9.1) \qquad \qquad \operatorname{H}^{1}(X_{V},K) \longrightarrow \operatorname{H}^{0}(B \cap V,H^{1}f_{*}K) \qquad .$$

Pour B \cap V connexe et z \in B \cap V , cela s'écrit encore

(6.2.9.2)
$$H^{i}(X_{Y},K) \longrightarrow H^{i}(X_{Z},K)^{\pi_{1}}(BnV,z)$$

Dans 6.2.9, l'existence de boules B du type indiqué est connue. Ces boules ne sont ici qu'une commodité d'exposition : on pourrait prendre d'autres voisinages formant un système fondamental de voisinages (définis par exemple en terme d'une triangulation). Ceci dit, et compte tenu de 6.2.5, la preuve est la même qu'en 5.4.7-5.4.9.

Théorème 6.2.10 (Lefschetz difficile relatif). Soient $f: X \to Y$ un morphisme projectif, ℓ la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample, et F un faisceau pervers semisimple d'origine géométrique sur X. Pour i > 0, on a

$$\ell^{i}: p_{H^{-i}} f_{*}F \xrightarrow{\sim} p_{H^{i}} f_{*}F(i)$$

Cet énoncé se déduit de 6.2.6 et de 5.4.10. Un cas particulier utile est celui où Y est réduit à un point. Il fournit le théorème de Lefschetz difficile en cohomologie d'intersection.

Remarque 6.2.11. On aimerait pouvoir, dans les énoncés qui précèdent remplacer "d'origine géométrique" par "de la forme $j_{!*}L[d]$, pour j l'inclusion de Y lisse connexe de dimension d et L le système local sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisable". On aimerait aussi pouvoir remplacer les variétés algébriques par des variétés kahlériennes compactes.

Si f est un morphisme de variétés kahlériennes compactes, nous ne savons démontrer ni que Rf $_*$ C est somme des $^{p}H^iRf_*$ C[i], ni que les faisceaux pervers $^{p}H^iRf_*$ C sont semi-simples, ni l'analogue de 6.2.10 pour Rf $_*$ (C[dim X]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Deligne: La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES <u>52</u> (1980), p. 137-252.

MA

- [2] P. Deligne : Théorie de Hodge III. Publ. Math. IHES $\underline{44}$ (1974), p. 5-78.
- [3] P. Deligne : Théorèmes de finitude en cohomologie $\,\ell$ -adique. Dans SGA 4 1/2, p. 233-251.
- [4] M. Goresky et R. MacPherson : La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers. CR Acad. Sci. Paris <u>284</u> (27 juin 1977), p. 1549-1551.
- [5] M. Goresky and R. MacPherson: Intersection homology theory. Topology 19 (1980), p. 135-162.
- [6] M. Goresky and R. MacPherson: Intersection Homology II. Inv. Math. 72, 1 (1983), p.77-79.
- [7] R. Hartshorne : Residues and duality. Lecture Notes in Math. $\underline{20}$ (1966).
- [8] L. Illusie: Complexe cotangent et déformations. Lecture Notes in Math. 239 (1971) and 283 (1972).
- [9] M. Raynaud: Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes [d'après Šafarevic, Ogg et Grothendieck]. Séminaire Bourbaki 286 (1964/65). New York: Benjamin, 1966.
- [10] J.L. Verdier: Catégories abéliennes, état O. Dans SGA4 1/2, p. 262-308.
 - Prendre garde que certaines conventions de signe diffèrent de celles des notes miméographiées originelles.

SIGLES.

SGA : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, paru, sauf SGA2, aux Lecture Notes in Mathematics.

SGA 4 : LN 269 (I-IV), LN 270 (V-VIII), LN 305 (IX-XIX).

SGA 4 1/2: LN 569.

SGA 5 : LN 589.

SGA 7 : LN 288(I-IX), LN 340 (X-XXII).

EGA : Eléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck et J. Dieudonné. EGA 4,3è partie = Publ. Math. IHES $\underline{28}$ (1966).

INDEX TERMINOLOGIQUE

| Admissible | (morphisme) : | 1.2.3 |
|--------------|--------------------------------|-------------|
| | (sous-catégorie abélienne) : | 1.2.5 |
| | (suite exacte courte) : | 1.2.3 |
| | | |
| Amplitude o | 4.2.1 | |
| | | |
| Cartésien : | 3.2.5, 3.2.6 | |
| | | |
| Catégorie : | (dérivée) : | 1,1,3 |
| | (dérivée filtrée, bifiltrée) : | 1.1.4 ex. 1 |
| | | 3.1.1 |
| | (exacte) : | 1.1.4 |
| | (triangulée): | 1.1,1 |
| | | |
| | e t-catégorie): | 1.3.1 |
| Cône : | | 1.1.1 |
| | | |
| Constructib: | | 2.1.13 |
| | ((S,L)-) : | 2.2.10 |
| | | |
| Diagramme de | | 1.1.11 |
| Distingué (| 1.1.1 | |
| | | |
| Extension (| stable par) : | 1.2.6 |
| Filtration | (hāta) | 3.1.7 |
| | (canonique): | 3.1.5 |
| | (par le poids) : | 5.3.5 |
| | (par 10 porab) . | 3.3.3 |
| Localement | (C-) : | 3.2.3 |
| | | |
| Mixte: | | 5.1.5 |
| | | |
| Octaèdre : | | 1.1.6 |
| Origine géor | 6.2.4 | |
| | | |

| Pervers (faisceau) : amplifié par | 2.1.5, 2.1.13 2.2.1, 2.2.17; 4.0.1, 4.0.2 |
|---|--|
| Perversité (duale) : (fonction de) : | 2.1.16 2.1.1, 2.2.1 |
| Poids (ponctuels) : $ (\leq w, \geq w) : \\ \\ \text{amplifié par} $ | 5.1.5 5.1.8 5.1.11, 5.1.12 |
| Produit tensoriel externe : | 4.2.7 |
| Prolongement : | 1.4,13 |
| <pre>Pur (ponctuellement) : (de poids w) :</pre> | 5.1.5 5.1.8 |
| Réalisation : Recollement (de t-structure) : | 3.1.9 1.4.10 |
| Strate : | 2.1.1 |
| <pre>t-catégorie : t-exact :</pre> | 1.3.1 1.3.16 1.3.20 |
| <pre>t-structure :</pre> | 1.3.1 1.3.2 (iii) 1.3.19 1.3.2 2.1.4 1.3.2 (ii) |
| Translation (foncteur de) : | 1.1.1. |
| Tronqué : | 1.3.2(i), 1.3.3 |

INDEX DES NOTATIONS

- 0 est une catégorie triangulée. Elle est le plus souvent munie d'une t-structure, de coeur C.

$$p^{\geq a}$$
, $p^{\leq b}$: 1.3.1 $-p^{[a,b]} := p^{\leq a}$ n $p^{\leq b}$ $-p^b$: 1.3.12 $-p_F$, p^b_F : 3.1.5

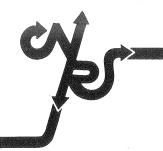
- D(...) est une catégorie triangulée, dépendant de $\begin{array}{l} D(X,0) \ : \ 1.4.1 \ - \ D_{S} \ : \ 2.1.13 \ - \ D_{C} \ : \ (2.1.13), 2.2.1 \ - \ D_{S,L} \ : \ 2.1.10 \\ DF_{L}DF^{2} \ : \ 3.1.1 \ - \ D_{C}^{b}(X,\mathbb{Z}_{\chi}) \ : \ (2.2.14.1) \ - \ D_{C}^{b}(X,\mathbb{Q}_{\chi}) \ , \ D_{C}^{b}(X,E_{\chi}) \ , \end{array}$ $D_{\alpha}^{b}(X,\overline{\mathbb{Q}}_{\alpha}): 2.2.17.$
- p est une perversité (2.1.1,2.2.1) , p^* sa duale p_s : 2.2.1 . En exposant gauche, p indique un foncteur entre coeurs de t-catégories - p_T : 1.3.17(i) - ou relatif à une t-structure (P_{τ}, P_{H}^{i}) .
- τ est un foncteur de troncation.

$$\tau_{\geq a}$$
 , $\tau_{\leq b}$: 1.3.3 - $\tau_{[a,b]}$: 1.3.5 - τ^F , τ^U : 1.4.13.

- Notation diverses : D : dualité de Verdier. F[n] : filtration décalée : 3.1.8. $G: \mathcal{D}^{b}F \rightarrow C^{b}(\mathcal{D}): 3.1.7.$ н^о: 1.3.6, Hom : 3.2.5. j_{*} : 1.4.14.1, 1.4.22, 2.1.7. M(X.0) : 1.4.1. $n,n*,n^+:3.3.1.$ réal : 3.1.9. tot A: 3.2.7.

> $\delta(F,G)$: 3.1.2. Δ, Δ^{+} : 3.2.6. ☑: 4.2.7.

These volums contains the notes of the Luminy conference: Analyse et topologie sur les espaces singuliers. The lectures are centered around the following themes: Perverse sheaves, Intersection homology and its applications, Hodge structure on the Intersection Homology and on the vanishing cycles, local and global Euler Poincaré characteristics, Bernstein polynomial.



Colloques internationaux du C.N.R.S./ Nº 332

LA THÉORIE DE L'ITÉRATION ET SES APPLICATIONS

Toulouse, Mai 1982

- Discipline en plein essor réunissant le concours de plusieurs spécialités • base mathématique portant sur les différents aspects de la théorie de l'itération • processus chaotiques dans les systèmes non linéaires • attracteurs étranges • application en mécanique, biologie, médecine...
- . Itération analytique, itération fractionnaire et continue.
- . Récurrences associées à un système différentiel. Etude du portrait de phase.
- . Solutions périodiques (résonance) bifurcations et attracteurs.
- . Applications.

34 communications dont 15 en anglais

16 x 24 / 284 PAGES / DOS COLLÉ 49 FIG./ 1 TABL. ISBN 2-222-03169-9

95 F

Documentation gratuite sur demande

Editions du CNRS 15 quai Anatole France. 75700 Paris

ASTÉRISQUE

- 1973: 1 Y. MEYER Trois problèmes sur les sommes trigonométriques.
 - 2-3 Colloque international du CNRS Équations aux dérivées partielles linéaires (Orsay, 1972).
 - 4 Séminaire K.G.B. Sur les marches aléatoires (Rennes 1972).
 - 5 R. KAUFMAN and Th. KORNER Pseudofunctions and Helson sets.
 - A. HATCHER and J. WAGONER Pseudo-isotopies of compact manifolds.
 - 7-8 Colloque sur les singularités en géométrie analytique (Cargèse, 1972).
 - J. PELLAUMAIL Une nouvelle construction de l'intégrale stochastique.
 - A. ESCASSUT et Ph. ROBBA Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques.
- 1974 : 11 B. MAUREY Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p.
 - 12 F. LAUDENBACH Topologie de la dimension trois : homotopie et isotopie. (Épuisé)
 - 13-14 A. GUICHARDET Systèmes dynamiques non commutatifs.
 - 5 B. MAISONNEUVE Systèmes régénératifs.
 - 16 A. DOUADY J.-L. VERDIER Séminaire de géométrie analytique.
 - 17 A. DOUADY J.-L. VERDIER Séminaire de géométrie analytique.
 - 18 E. BOMBIERI Le grand crible dans la théorie analytique des nombres.
 - 19 S. ALINHAC P. BOLLEY J. CAMUS B. HANOUZET B. HELFFER C. ZUILY Sur quelques équations aux dérivées partielles singulières.
 - 20 H. C. PINKHAM Deformations of algebraic varieties with Gm action
- 1975: 21 N. EL KAROUI H. REINHARD Compactification et balayage de processus droits.
 - 22-23 Ph. COURRÈGE · P. PRIOURET P. RENOUARD M. YOR Oscillateur anharmonique, processus de diffusion et mesures quasi-invariantes
 - 24-25 Journées arithmétiques de Bordeaux (1974)
 - 26 J. LANNES F. LATOUR Forme quadratique d'enlacement et applications.
 - 27 . R. CORI Un code pour les graphes planaires et ses applications.
 - 28-29 A. DENJOY Évocation de l'homme et de l'œuvre.
 - 30 R. ROUSSARIE Modèles locaux de champs et de formes.
- 1976: 31 J.E. FRANKE S. NEWHOUSE J. PALIS M. M. PEIXOTO Trois études en dynamique qualitative.
 - 32-33 Colloque Analyse et Topologie en l'honneur de H. CARTAN, 2e édition.
 - 34-35 Journées "Équations aux dérivées partielles" de Rennes.
 - 36-37 A. DOUADY J.-L. VERDIER Séminaire de géométrie analytique.
 - 38-39 Journées Algorithmiques (Paris, 1975).
 - 40 International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics. (Rennes, 1975)
- 1977: 41-42 Journées Arithmétiques de Caen (1976).
 - 43-44 Théorie de la robustesse et estimation d'un paramètre (Orsay-Paris VII, 1974-1975)
 - 45 D. LEHMANN Théorie homotopique des formes différentielles (d'après D. Sullivan).
 - 46 J.-P. SERRE Arbres, amalgames, SL₂, 3e édition.
 - 47-48 J.-M. FONTAINE Groupes p- divisibles sur les corps locaux.
 - 49 Dynamical Systems I, Warsaw (1977), 2e édition.
 - 50 Dynamical Systems II, Warsaw (1977), 2e édition.

- 1978: 51 Dynamical Systems III, Warsaw (1977), 2e édition
 - 52-53 Temps locaux (Paris VI, 1976-1977).
 - 54 A. BEAUVILLE Surfaces algébriques complexes, 3e édition.
 - Représentations des groupes localement compacts et applications aux algèbres d'opérateurs (Orléans, 1973-1974).
 - 56 M. SHUB Stabilité globale des systèmes dynamiques, 2e édition.
 - 57 R. R. COIFMAN Y. MEYER Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, 2º édit.
 - 8 Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi (Séminaire Palaiseau 1978), 2º édition.
 - 59-60 Journées singulières de Dijon.
- 1979: 61 Journées Arithmétiques de Luminy (1978).
 - 62 P. DOMBROWSKI 150 Years after Gauss' "disquisitiones generales circa superficies curvas" - 2º édition
 - 63 Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Juillet 1978.) I
 - 64 Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Juillet 1978.) II
 - 65 Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Juillet 1978.) III
 - 66-67 Travaux de Thurston sur les surfaces (Séminaire Orsay.)
 - 68 Grandes déviations et applications statistiques (Séminaire Orsay 1977-1978).
 - 69-70 M. WALDSCHMIDT Nombres transcendants et groupes algébriques.
- 1980: 71-72 Les équations de Yang-Mills (Séminaire E.N.S. 1977-1978).
 - 73 Modèles de l'arithmétique (Séminaire Paris VII) K. MC ALOON.
 - Journées sur les marches aléatoires (Nancy, 1979.)
 - 75-76 Analyse des systèmes (Bordeaux, 11-16 septembre 1978).
 - R. R. COIFMAN R. ROCHBERG M. H. TAIBLESON G. WEISS Representation theorems for Hardy spaces.
 - 78 A. LOUVEAU Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits.
 - 9 N. KATZ Sommes exponentielles, rédigé par G. LAUMON.
 - 80 Analyse sur les variétés (Metz, 1979.)
- 1981: 81 P. BUSER and H. KARCHER Gromov's almost flat manifolds.
 - 82-83 Caractéristique d'Euler-Poincaré (Séminaire E.N.S. 1978-1979).
 - 84-85 Géodésiques et diffusions en temps petit (Séminaire de probabilités, université de Paris VII).
 - 86 Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux (L. SZPIRO),
 - 87-88 Tableaux de Young et foncteurs de Schur en algèbre et géométrie (Toruń, 1980).
 - 89-90 Analytic solutions of partial differential equations (Trento, 1981).
- 1982: 91 C. DE CONCINI, D. EISENBUD, C. PROCESI Hodge Algebras.
 - 92-93 SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1981/82, exposés 579-596
 - 94 JOURNÉES ARITHMÉTIQUES, Metz (1981)
 - J. SJÖSTRAND Singularités analytiques microlocales, (suivi d'un texte avec B. LASCAR sur l'équation de Shrödinger).
 - C. S. SESHADRI Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, (rédigé par J.-M. DREZET).
 - 97 D. CERVEAU, J.-F. MATTEI Formes intégrables holomorphes singulières.
 - 98-99 Bifurcation, théorie ergodique et applications. (Dijon, juin 1981).
 - 100 Analyse et topologie sur les espaces singuliers. (CIRM 1981) Vol. I

1983: 101-102 - Analyse et Topologie sur les espaces singuliers (CIRM, 1981) - Vol. II - III

103-104 - M. R. HERMAN - Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau,

105-106 - SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1982/83, exposés 597-614.

en préparation :

- IIIe rencontre de géométrie du Schnepfenried (Mai 1982).

INSTRUCTIONS AUX AUTEURS

ASTÉRISQUE, revue éditée par la Société Mathématique de France, est reproduit par procédé offset. Ceci exclut toute possibilité d'y apporter des modifications ultérieures. Si un manuscrit ne se prête pas à la reproduction directe, il sera retourné pour une nouvelle frappe. De ce fait, les indications suivantes doivent être scrupuleusement suivies :

La frappe doit être effectuée sur des feuilles imprimées spéciales qui peuvent être fournies sur demande au Secrétariat*. Le texte doit tenir dans le cadre complet (format dactylographié $18 \times 25,5$ cm), le trait de pagination se situant en bas du texte.

Les manuscrits doivent être tapés avec interligne de 1 1/2. Pour obtenir une reproduction convenable, il est recommandé de se servir d'une machine électrique (par exemple d'utiliser une boule IBM 72 " courrier ", le texte étant tapé avec caractères pica 10 frappés avec espacement de 10). Ne pas laisser de " blancs " inutiles, pour respecter une densité de texte ; nous conseillons de prévoir un minimum de 27 lignes dactylographiées par page.

Les corrections ne doivent être faites qu'avec du blanc couvrant ou par découpage. Tous les symboles qui ne sont pas tapés à la machine doivent être tracés soit avec un stylet à l'encre de chine, soit avec un stylo-bille fin noir ; ne pas souligner avec des couleurs.

Il serait prudent, avant de poursuivre la frappe, d'adresser au Secrétariat de la Revue, une copie des 5 ou 6 premières pages du chapitre I (et non de l'introduction) à l'adresse mentionnée ci-dessous.

(*) Société Mathématique de France - Revue Astérisque - B.P. 126-05 - 75226 PARIS CEDEX.

PRÉSENTATION D'UN MANUSCRIT

- 1) Table des matières
- 2) Texte
- 3) Bibliographie

Les références bibliographiques doivent être numérotées, complètes et exactes, citées par ordre alphabétique.

- 4) Abstract ou résumé en français ou en anglais
- 5) Le début de chaque paragraphe se place à 3, 4 ou 5 espaces du bord du cadre.

Les textes des théorèmes, propositions, etc. sont soulignés (pas de soulignement sous la ponctuation, ni sous les symboles mathématiques).

Les accents doivent être mis sur les titres en majuscules. Ne pas paginer à la machine, *mais au crayon hors du cadre*

- 6) Pour un colloque ou séminaire, à chaque exposé ou conférence :
- prévoir, avant le titre, un espace en haut du cadre (interligne 2) pour les références de publication ;
- en fin de texte, placer, à droite de celui-ci, le nom, prénom et adresse professionnelle de l'auteur.

INSTRUCTIONS TO AUTHORS

The journal ASTERISQUE, published by the Société Mathématique de France, uses the offset process of reproducing manuscripts photographically, so that late changes at the proof stage are excluded. Any manuscript not suitable for direct reproduction will be returned for retyping. Because of this, the following instructions should be carefully observed:

Manuscripts must be typed on specially prepared paper available on demand from the secretary*. The text must remain in the indicated frame (18 \times 25.5 cm); page numbers will be added below the text.

Manuscripts must be typed with 1 1/2 spaces between lines. An electric typewriter is recommended (with, for instance, an IBM 72 "Courrier" ball, using Pica 10 characters on 10 spacing). Avoid wasting space unnecessarily: we suggest a minimum of 27 typed lines per page.

Corrections must be made with white correcting fluid or by cutting. All symbols which are not typed must be traced carefully with Indian ink or with a fine black ball-point pen; do not underline in colour.

We suggest sending the first of 5 or 6 pages of the first chapter (not the introduction) to the address below for approval before typing the remainder of the text.

(*) Société Mathématique de France - Revue Astérisque - B.P. 126-05 - 75226 PARIS CEDEX.

PRESENTATION OF A MANUSCRIPT

- 1) Table of contents
- 2) Text
- 3) Bibliography

Bibliographical references must be numbered, exact and complete, and listed in alphabetical order.

- 4) Abstract in French or in English
- 5) Each new paragraph should begin either 3, 4 or 5 spaces from the edge of the indicated frame.

Statements of theorems, propositions, and so on... should be underlined (but do not underline punctuation, nor mathematical symbols).

Accents on capital letters should not be omitted.

Do not type page numbers. They should be written in pencil outside the rectangular frame.

- 6) In the case of a conference or a seminar, for *each* talk or lecture:
- leave 2 blank lines above the title to allow for bibliographical details;
- at the end of the text, give the surname, christian name and professional address of the author on the right-hand side of the page.

Colloque de Luminy: Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Les thèmes abordés sont: Faisceaux pervers, Homologie d'intersection et applications, Structure de Hodge sur l'homologie d'intersection et sur les cycles évanescents, Polynôme de Bernstein, Caractéristiques d'Euler-Poincaré locales et globales.

ASTÉRISQUE 100, 1982 Directeur de la publication : J.-P. KAHANE Couverture : RIGMOR POENARU achevé d'imprimer le 12 décembre 1983 Imprimerie Martial PEAU C.D. 370, route d'Alencon 28400 NOGENT-LE-ROTROU Depôt légal : Imprimeur ISSN 0303-1179 Editeur : C.P.P.P. 53621 - Imprimé en France